高代讲义

主讲人：王政元

一、内容精华

1.1　解析几何

解析几何部分的难点不在于题目的难度，而在于知识面的广度，因此列出相关定义供大家回顾复习。

1.1.1　旋转曲面

定义 1.1 空间一条曲线C绕一条直线L旋转一周所得曲面称为旋转曲面，曲线C称为旋转曲面的母线，L称为旋转曲面的轴。

如：旋转椭球面，旋转单页双曲面，旋转双叶双曲面等。

1.1.2　柱面

定义 1.2 一条直线L沿着一条空间曲线C作平行移动所产生的曲面称为柱面，L在每一个位置都称为母线，C称为准线。

1.1.3　锥面

定义 1.3 在空间中通过一个定点M_0并与定曲线C相交的一族直线所生成的曲面称为锥面，这些直线称为锥面的母线，M_0称为锥面的顶点，C称为锥面的准线。

定理 1.1 一个关于x,y,z的n次$(n>0)$齐次方程总是表示顶点在原点的一个锥面。

1.1.4　二次曲面

例：椭球面，单叶双曲面，双叶双曲面，椭圆抛物面，双曲抛物面

1.1.5　直纹面

定义 1.4 如果曲面S上存在一族直线，使得族中每条直线都在曲面S上，并且S上的每一个点在这个族中的某一条直线上，则称曲面S为直纹面，这族直线称为直纹面S的一族母直线。

例：单叶双曲面，双曲抛物面。

1.2 线性变换

除解析几何外的其他部分的知识点更多需要的是在题目中融会贯通，因此只列出部分定理，其他定理参考教科书即可。

定理 1.2 线性变换$\mathscr{A} \in End_K(V)$是可对角化的充分必要条件是线性空间V有一个由$\mathscr{A}$的特征向量组成的基。

定理 1.3 设$\mathscr{A} \in End_K(V)$.则$\mathscr{A}$的矩阵相似于一个分块对角阵充分必要条件是V可以分解成$\mathscr{A}$ 的不变子空间的直和。

1.3 线性空间上的函数

定理 1.4 数域K上的对称矩阵$A \in M_n(K)$一定可以相合于对角矩阵B, K是复数域时B=*diag(1,...,1.0,...,0)*. K是实数域时B=*diag(1,...,1,-1,...,-1,0,...,0)*.

定理 1.5 实对称矩阵A时正定的充要条件是它的所有顺序主子式全大于0。

1.4 一元多项式

定理 1.6 设$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$是一个整系数多项式，如果能找到一个素数$p$使得

$(1) p \nmid a_n$

$(2) p \mid a_{n-1}, ..., a_0;$

$(3) p^2 \nmid a_0.$

那么$f(x)$在有理数域上不可约

二、典型例题

例题 2.1 设A，B是n阶矩阵，证明：AB和BA具有相同的特征值。

例题 2.2 设A为n阶复方阵，$p(x)$为$I - \bar{A}A$的特征多项式，其中$\bar{A}$表示 A的共轭矩阵，证明：$p(x)$必为实系数多项式。

例题 2.3 设A是n阶实矩阵，若对于任意n维非零实向量X，恒有$X^TAX > 0$,则 $|A|>0$

例题 2.4 设A，B，X为同阶方阵，并且$AX=XB$，秩$X=r$，证明：在复数域上，A与B至少有r个相同的特征根。

例题 2.5 已知f_1为实n元正定二次型，令$V=\{f \mid f$为实n元二次型，满足：对任何实数k有$kf + f_1$属于恒号二次型$\}$，这里恒号二次型为0二次型，正定二次型及负定二次型的总称，证明：V按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间，并求这个向量空间的维数。

例题 2.6 $A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶实方阵，满足

(1)$a_{11}=a_{22}=...=a_{nn}=a>0$*;*

*(2)*对每个*i(i=1,2,...,n),*有 $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|+\sum_{j=1}^{n}|a_{ji}|<4a$.求二次型$f(x_1,...,x_n)$的规范型，$A$是其矩阵。

例题 2.7 给定非零实数a及实n阶反对称矩阵A，记矩阵有序对集合T为：$T=\{(X,Y)|X\in R^{n\times x},Y\in R^{n\times n},XY=aI+A\}$ 其中I为n阶单位阵，$R^{n\times n}$为所有实n阶方阵构成的集合。

证明：任取T中的两元：（X，Y）和（M，N），必有$XN+Y^TM^T\neq 0$

例题 2.8 设A为n阶方阵，其n个特征值皆为偶数，试证明关于X的矩阵方程$X+AX-XA^2=0$只有零解

例题 2.9 设*n>1*为正整数，证明多项式$f(x)=x^n-x-1$在有理数域Q上不可约。

例题 2.10 设$f(x)=x^{2021}+a_{2020}x^{2020}+...+a_1x+a_0$为整系数多项式，$a_0\neq 0$设对任意$0\leq k\leq 2020$有$|a_k|\leq 40$,证明：*f(x)=0*的根不可能全为实数。