一. 极限

数列极限.

有界性. 上下界 (确界原理)

Def: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 即 $\forall \varepsilon$ $\exists N$. s.t $n>N$ $|x_n-A|<\varepsilon$.

例: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 则 $\lim \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = A$.

(By definition. 分段处理 即可) (Stolz).

定理4:(Stolz定理)设$\{y_n\}$是严格单调增加的正无穷大量，且$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$（a可以为有限量、无限量、$+\infty$或$-\infty$，但不能是$\infty$），则$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$.

Proof1:
由已知得: $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^+,s.t.\forall n>N,|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a|<\varepsilon$,即
$a-\varepsilon<\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}<a+\varepsilon(n>N)$.
因为$\{y_n\}$是严格单增的正无穷大量,所以$y_n-y_{n-1}>0$.故当$n>N$时,有
$(a-\varepsilon)(y_n-y_{n-1})<x_n-x_{n-1}<(a+\varepsilon)(y_n-y_{n-1})$
设k是大于$N+1$的任意自然数(k是任意的,故也可视为一个变量),则上面不等式第$N+1$到k项累加可得:
$(a-\varepsilon)\sum_{n=N+1}^{k}(y_n-y_{n-1})<\sum_{n=N+1}^{k}x_n-x_{n-1}<(a+\varepsilon)\sum_{n=N+1}^{k}(y_n-y_{n-1})$
即$(a-\varepsilon)(y_k-y_N)<x_k-x_N<(a+\varepsilon)(y_k-y_N)$,同时除以$y_k$得到

$(a-\varepsilon)(1-y_N/y_k)<\frac{x_k}{y_k}-\frac{x_N}{y_k}<(a+\varepsilon)(1-y_N/y_k)$,即

$(a-\varepsilon)(1-\frac{y_N}{y_k})+\frac{x_N}{y_k}<\frac{x_k}{y_k}<(a+\varepsilon)(1-\frac{y_N}{y_k})+\frac{x_N}{y_k}$,注意到$N$已经选定了,所以$y_N,x_N$均为一个有限量.又由于$\{y_n\}$是严格单增正无穷大量,所以存在一个$K(K\in N^+,K>N+1)$当$k$取得充分大$(k>K)$的时候$\frac{y_N}{y_k},\frac{x_N}{y_k}\to 0$.

于是$(a-\varepsilon)<\frac{x_k}{y_k}<(a+\varepsilon)$,即有:
$\forall\varepsilon>0,\exists K\in N^+,s.t.\forall k>K,|\frac{x_k}{y_k}-a|<\varepsilon$.
所以$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{k\to+\infty}\frac{x_k}{y_k}=a$

性质: ① 唯一性

② $\{x_n\}$ 收敛 $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ 有界

③ 保号性: $x_n\to A$. $A>0$ 则 n large $x_n>\frac{A}{2}>0$

④ $x_n\to A$ $\Rightarrow$ n large $|x_n|>|\frac{A}{2}|>0$.

⑤ $x_n\to A$. $n>N$. $x_n\geq 0$ $\Rightarrow$ $A\geq 0$.

运算:

定理 2.5 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} y_n=AB$,

特别地, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(k\cdot x_n)=k\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (k 为常数);

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}=\frac{A}{B}$ (这里 $B=\lim\limits_{n\to\infty} y_n\neq 0$).

判定准则:

先判断收敛性
再计算
(用已知结论)

1). $x_n\to A \Leftrightarrow \forall \{x_{n_k}\}$ 有 $x_{n_k}\to A$.

2). $n>N$. $x_n\leq y_n\leq z_n$. $x_n\to A$. $z_n\to A$ $\Rightarrow$ $y_n\to A$.

例: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

应用. $\sqrt[n]{n}=1+h_n \Rightarrow n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n+$

$n\geq 1+\frac{n(n-1)}{2}h_n \Rightarrow 0\leq h_n\leq\frac{2}{n} \Rightarrow h_n\to 0$. 即可.

例. $\lim\sqrt[n]{1+2^n+3^n}=3$.

3) 定理 2.7 (单调有界原理) 单调有界数列必有极限.
此定理可改写为:
若数列单调增加且有上界(或单调减少且有下界), 则此数列必存在极限.

4) **定理 2.8（柯西收敛准则）** 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：$\forall \varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon \in \mathbf{Z}^+$，只要 m，$n>N_\varepsilon$ 时，就有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon.$$

这个定理是实数的基本原理之一，但其证明比较困难，这里略去。满足定理条件的数列称为**柯西数列或基本列**。

函数极限.

Definition： $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ -\infty\\ \infty}} f(x)$ 运用 $\varepsilon-X$ 语言.

单侧极限

性质： P40

运算： P41

准则： 1) **定理 5.1（海涅定理或归结原理）** 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是：对任何含于 $\mathring{U}(x_0)$ 且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

2) **定理 5.2（夹逼准则）** 如果函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 满足下列条件：

(1) 当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

(2) 当 $x\to x_0$ 时，有 $g(x)\to A$，$h(x)\to A$，

则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限存在，且等于 A.

3) 5.3* 函数极限的柯西收敛准则

定理 5.3（柯西收敛准则） 设函数 f 在 $\mathring{U}(x_0,\delta')$ 内有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(<\delta')>0$，使得 $\forall x'$，$x''\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

证 必要性. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(<\delta')>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$，从而当 $0<|x'-x_0|<\delta$，$0<|x''-x_0|<\delta$ 时有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

运算： 1).运用已知结论

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{-1}$$

【例 5.2】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+1}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$； (3) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}$

$=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=e^{-1}\cdot1=\frac{1}{e}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)^{n+\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{e}\cdot1^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{e}$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2=e^2$.

2) 等价无穷大(小)

同理，$\tan x=x+o(x)$ $(x\to0)$.

定理 6.5 设 α，β，α'，β' 均为 x 的同一极限过程中的无穷小，且 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，若 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 存在，且 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

证 因 $\lim\frac{\alpha}{\alpha'}=1$，$\lim\frac{\beta'}{\beta}=1$，有

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\beta}\right)=\lim\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\lim\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

例如：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\tan nx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}$；但是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$ 不正确，这是因为 $\tan x-\sin x$ 与 $x-x$ 不是等价无穷小，事实上，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1}{2},$$

即 $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$.

上例表明：代换的必须是分子或分母整体的无穷小，而不是各自加项的等价无穷小.

④ 当 $x\to 0$ 时，几个常见的等价无穷小：

$\sin x\sim x$，　$\tan x\sim x$，　$\arcsin x\sim x$，　$\arctan x\sim x$，

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，　$\ln(1+x)\sim x$，　$e^x-1\sim x$，　$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

特别地，$\alpha=\frac{1}{n}$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$.

3). Taylor 展开.

例：

1、（6分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n^2+1}}$

2、（6分）求极限: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)-x}{e^{\cos x}-e}$

连续性： Definition + 间断点 (p64-67) + p71

三. 求 $f(x)=\frac{(x-1)^2-1}{|x|(x^2-4)}$ 的间断点，并确定其类型. (7分)

解. $f(x)=\frac{x(x-2)}{|x|(x^2-4)}$，间断点为 $x=-2, x=0$ 及 $x=2$(4分). 其中，$x=-2$ 为无穷间断点，$x=0$ 为跳跃间断点，$x=2$ 为可去间断点(3分)

导数. Definition p79 + 81 (单侧导数).

运算法则 p87.

反函数求导法则 (p90) + 复合函数求导法则 (p91)

基本公式. (p95-96)

1. 几个常见初等函数的导数公式

(1) $(C)'=0$；　(2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$；

(3) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)；　(4) $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$；

(5) $(a^x)'=a^x\ln a$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)；　(6) $(e^x)'=e^x$；

(7) $(\sin x)'=\cos x$；　(8) $(\cos x)'=-\sin x$；

(9) $(\tan x)'=\sec^2 x$；　(10) $(\cot x)'=-\csc^2 x$；

(11) $(\sec x)'=\sec x\tan x$；　(12) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

(13) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　(14) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(15) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$；　(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$；

(17) 双曲正弦函数：$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，$(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$；

(18) 双曲余弦函数：$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，$(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$；

(19) 双曲正切函数：$\operatorname{th} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，$(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}$；

(20) 反双曲正弦函数：$\operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，$(\operatorname{arsh} x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$；

(21) 反双曲余弦函数：$\operatorname{arch} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，$(\operatorname{arch} x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$；

(22) 反双曲正切函数：$\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，$(\operatorname{arth} x)'=\frac{1}{1-x^2}$.

Special cases: 隐函数与参数方程 (p102)

高阶导数. (公式 p110).

中值定理.

费马　Rolle　Lagrange　Cauchy

例. （5分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(2)=0$
明：至少存在一点 $\xi\in(1,2)$ 使得
$$\xi\ln(\xi)f'(\xi)+f(\xi)=0.$$

$\varphi(x)=f(x)\cdot\ln x$

Taylor展开: $\begin{cases}\text{Lagrange 余项}\\ \text{Peano} \sim\end{cases}$

— $f'(x)=$

常用: $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots+o(x^{2n})$

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+o(x^{2n+1})$

$\ln(x+1) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$ (p144)

洛必达法则　$\frac{0}{0}$　$\frac{\infty}{\infty}$

不定积分.　Definition.

公式表.

计算: 换元法. { 第一类. 第二类　☆ $\boxed{\triangle\text{代换}}$

分部积分

定积分　Definition　性质.

判定定理: p231

Th: $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$　$(F'=f)$

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow \Phi'(x) = f(x)$

$\left[\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt\right]' = f(u(x))u' - f(v)$

计算: 1) 定义法

2) 换元 (nature: 找原函数)

3) 分部积分 $\int uv' = uv\big| - \int u'v$

应用: ① 计算面积

② 体积 (P256)

③ 弧长