Chapter 3 Linear Operators

Definition: X, Y are normed spaces

$$\begin{tikzcd} X \\ D(A) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "A"] & Y \end{tikzcd}$$

A is called an operator (算子)

↳ the domain of A

（线性算子）

A is called linear operator if:

i) $D(A)$ is a linear subspace of X

ii) A is linear: $A(\alpha x+\beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \quad \forall x, y \in D(A)$

（本章大部分情况令 $D(A)=X$，如无特别说明则默认）

A is called bounded if:

$\exists M>0$ s.t. $\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in X$

另外 $\|A\| := \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$ （注意不同范数所在的空间）

由于 $\sup\|Ax\|$ 在 $\|x\|=1$ 上取得

故 $\|x\|<1$ 时取 sup

和 $\|x\|\leq 1$ 时取 sup 效果一样

（A bounded ⟺ continous）

取"<"也一样（因为连续性）

☆

$$\boxed{\textbf{observation}: \|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|Ax\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|}$$

⇒ 相应地有：

$$\boxed{\|x\| = \sup_{A\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|A\|} = \sup_{\|A\|\leq 1}\frac{\|Ax\|}{\|A\|} = \sup_{\|A\|=1}\|Ax\|}$$

Proof: $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \sup\limits_{\substack{x\neq 0 \\ \|x\|\leq 1}}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|Ax\| \geq \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$

而对 $\forall x \in X$ $(x\neq 0)$ 令 $v = \frac{x}{\|x\|}$ 则 $\|Av\| = \|A\frac{x}{\|x\|}\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

且 $\|v\|=1$

即 $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ $(x\neq 0)$ 与 $\|Av\|$ $(\|v\|=1)$ 一一对应 从而 $\sup\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$

∴ 不等号全部化为等号 ⇒ $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|<1}\|Ax\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$ ※

事实上 $\frac{\|A\alpha x\|}{\|\alpha x\|} = \frac{|\alpha|\|Ax\|}{|\alpha|\|x\|} = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

∴ $\sup\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ 与 x 的长度无关，只与 x 的方向有关

相当于共线的所有向量是等价类

这里取 $\|x\|=1$ 是为了去掉分式的形式，便于处理

Prop: $\underset{\text{(linear)}}{A}: X \longrightarrow Y$ X, Y: normed space, then

① A is continous at one point $x_0 \Leftrightarrow$ ② A is bounded

$\Leftrightarrow$ ③ A is continous at all points.

(这个命题说明：有界线性算子和连续线性算子是一回事，且仅在一点连续即可).

Proof: ① $\Rightarrow$ ② 假设 $\|A\| = +\infty$ （无界 $\Leftrightarrow \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ 不存在 即 $\|A\| = +\infty$ ）

则对 $\forall n > 0$ $\exists x_n \in X$ s.t. $\|x_n\| < 1$ $\|Ax_n\| > n^2$

（$\because \sup\limits_{\|x\|<1} \|Ax\|$ 可以任意大）取 $z_n = \frac{x_n}{n}$ 则 $\|z_n\| < \frac{1}{n}$, $\|Az_n\| > n$

$\therefore$ $x_0 + z_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ 由 A 在 x_0 连续 $\Rightarrow A(x_0+z_n) \xrightarrow{n\to\infty} Ax_0$

$\therefore \|A(x_0+z_n)\|$ 有界 $\Big(\because \big|\|A(x_0+z_n)\| - \|Ax_0\|\big| \leq \|A(x_0+z_n) - Ax_0\| \to 0\ (n\to\infty)\Big)$ 设为 M

$\therefore$ $\|A(x_0+z_n)\| \leq M \Rightarrow \|Ax_0 + Az_n\| \leq M$

$\big|\|Az_n\| - \|Ax_0\|\big| \leq \|Ax_0 + Az_n\| \leq M \Rightarrow \|Az_n\| \leq \underbrace{\|Ax_0\| + M}_{\text{定值}}$ 有上界

这与 $\|Az_n\| > n$ ($\forall n$) 矛盾 $\therefore$ $\|A\|$ 有限. A is bounded

② $\Rightarrow$ ③ $\forall x \in X$ $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

则 $\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \to 0\ (n\to\infty)$

$\therefore$ $Ax_n \xrightarrow{n\to\infty} Ax$

③ $\Rightarrow$ ① OK 有界线性算子才能定义其范数 #

ΔΔ

$\boxed{\text{练习}}$: $B(X, Y)$ 表示所有从 X 到 Y 的有界线性算子，则 $B(X,Y)$ 构成线性空间，且在定义了有界线性算子的范数后成为一个 $\boxed{\text{normed space}}$

验证：$A_1, A_2 \in B(X,Y)$. 则考虑 $\alpha A_1 + \beta A_2$

对 $x_1, x_2 \in X$ $(\alpha A_1 + \beta A_2)(ax_1 + bx_2) = \alpha A_1(ax_1+bx_2) + \beta A_2(ax_1+bx_2)$

$= a(\alpha A_1 + \beta A_2)x_1 + b(\alpha A_1 + \beta A_2)x_2$ $\therefore$ $\alpha A_1 + \beta A_2$ is linear

$$\begin{aligned}\|(\alpha A_1 + \beta A_2)x\| = \|\alpha A_1 x + \beta A_2 x\| &\leq |\alpha|\|A_1 x\| + |\beta|\|A_2 x\| \\ &\leq |\alpha| M_1 \|x\| + |\beta| M_2 \|x\| \\ &= (|\alpha| M_1 + |\beta| M_2)\|x\|\end{aligned}$$

$\therefore$ $\alpha A_1 + \beta A_2$ is bounded

$\therefore$ $\alpha A_1 + \beta A_2 \in B(X,Y) \Rightarrow B(X,Y)$ is a vector space

再验证范数 $\|A\| := \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ 成立

只验证三角不等式：

$$\|A_1+A_2\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A_1+A_2)x\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|A_1x + A_2x\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1}(\|A_1x\| + \|A_2x\|)$$

$$\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|A_1x\| + \sup_{\|x\|\leq 1} \|A_2x\| = \|A_1\| + \|A_2\|$$

OK. #

<u>Theorem</u>: Y is a Banach space $\Leftrightarrow$ $B(X,Y)$ is a Banach space

Proof: ($\Leftarrow$) （准备工作）取 $x_0 \in X$ 且 $\underbrace{\|x_0\| = 1}$ $x_0^*: X \to \mathbb{R}$ is the $\underbrace{\text{norming functional}}$ of x_0 (☆☆ $\underbrace{x_0^*(x_0) = \|x_0\| \text{ 且 } \|x_0^*\| = 1}$) $\Rightarrow$ 在 Hahn-Banach extension theorem 的应用中证明过其存在性

这么构造的目的都是为了做出一个保范嵌入

对 $\forall y \in Y$. 定义 $A^y \in B(X,Y)$

$$A^y : X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto x_0^*(x)y$$

(i.e. $A^y(x) = x_0^*(x)y$)

($A^y \in B(X,Y)$ 需要验证)

下面开始证明：

想证 $\{y_n\}$ Cauchy seq in $Y \Longleftrightarrow \{A^{y_n}\}$ Cauchy seq in $B(X,Y)$

验证：构造 $\phi: Y \longrightarrow B(X,Y)$ (linear)

$$y \longmapsto A^y$$

$\|x_0\| \neq 1$ 也不影响此方法

<u>claim</u>: ϕ is an isometric embedding (保范数的嵌入)

嵌入的拓扑定义，这里用不上，也不必证明

(i.e. ($\phi(Y)$ 与 $B(X,Y)$ 的一个子集同胚 且) $\|y\| = \|A^y\|$)

$$\|A^y\| = \sup_{\|x\|<1} \|A^y x\| = \sup_{\|x\|<1} \|x_0^*(x)y\| = \sup_{\|x\|<1} |x_0^*(x)|\|y\| \overset{\triangle}{=} \underbrace{\|x_0^*\|}_{=1}\|y\| = \|y\|$$

则 $\|y_n - y_m\| = \|A^{y_n} - A^{y_m}\|$ (*)

设 $\{A^{y_n}\}$ is Cauchy seq in $B(X,Y)$ 则完备 $\Rightarrow \exists A \in B(X,Y)$

s.t. $A^{y_n} \longrightarrow A$ ($n \to \infty$)

由(*)：$\{y_n\}$ is Cauchy seq in Y

又 $y_n = \underbrace{\|x_0\|}_{=1} y_n = x_0^*(x_0) y_n = A^{y_n} x_0$ ∴ 记 $y = Ax_0$

而 $A^{y_n} \to A$ ($n\to\infty$) $\Rightarrow$ $A^{y_n}x_0 \longrightarrow Ax_0$ ($n \to \infty$)

(∵ $\|A^{y_n}x_0 - Ax_0\| = \|(A^{y_n} - A)x_0\| \leq \|A^{y_n} - A\| \|x_0\| \longrightarrow 0$ ($n\to\infty$))

则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} A^{y_n}x_0 = Ax_0 = y \in Y$ ∴ Y is Banach space

(⇒) 对 $\forall \{A_n\}$ Cauchy seq in $B(X,Y)$ 对 $\forall x \in X$ (x取定后)

$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| \longrightarrow 0 \ (n, m \to \infty)$

$\therefore$ $\{A_n x\}$ 是 Y 中 Cauchy seq.

$\because$ Y Banach space $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ 记为 Ax

下面证明：① $A \in B(X,Y)$ ② $\|A_n - A\| \to 0 \ (n \to \infty)$

① $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(\alpha x_1 + \beta x_2) = \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha A x_1 + \beta A x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$

$\therefore$ A is linear $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0 \overset{\text{三角不等式}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x\| = \|Ax\|$

$\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|\lim\limits_{n\to\infty} A_n x\| \overset{\downarrow}{\doteq} \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x\|$

$\leq \sup\limits_n \|A_n\| < +\infty$ ($\because$ $A_n \in B(X,Y)$ $\therefore$ A_n is bounded $\Rightarrow \|A_n\| < +\infty$)

$\therefore$ A is bounded

从而 $A \in B(X,Y)$

② $\|A_n - A\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|(A_n - A)x\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|(A_n - \lim\limits_{k\to\infty} A_k)x\|$

$= \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \lim\limits_{k\to\infty} \|(A_n - A_k)x\| \leq \limsup\limits_{k\to\infty} \|A_n - A_k\|$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = \lim\limits_n \limsup\limits_k \|A_n - A_k\| = 0$ #

The adjoint operator (伴随算子)

Definition:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] & Y \\ x \arrow[r, mapsto] & Ax \end{tikzcd}$$

$\underset{\sim\sim\sim}{A \in B(X,Y)}$ 注意是对有界线性算子定义的.

欲定义 $$\begin{tikzcd} X^* & Y^* \arrow[l, "A^*"'] \end{tikzcd}$$

pairing (注意方向相反) $$\begin{tikzcd} A^*y^* & y^* \arrow[l, mapsto] \end{tikzcd}$$

$\uparrow$

$(\underbrace{A^*y^*}_{\in X^*}, x) := (y^*, \underset{\sim}{Ax}) \Rightarrow$ 已经定义的 $\boxed{A^*y^*}$ 待定义的.

想定义的

解释：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend left] & Y \arrow[r, "y^*"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right] & Ax \arrow[r, mapsto] & y^*Ax \end{tikzcd}$$

从结果来看，每取定一个 y^*，将 $x \mapsto y^*Ax$，相当于确定了一个从 $X \to \mathbb{R}$ 的 bounded linear functional

$\therefore$ $Y^* \xrightarrow{A^*} X^*$ 可以定义这样一个 A^*

为了证明 $(A^*y^*, x) := (y^*, Ax)$ 这一定义良定义

需验证 $x \longmapsto (y^*, \underset{\in Y}{\underbrace{Ax}})$ 这个映射属于 X^* (i.e. $A^*y^* \in X^*$)

i) $y^*(\alpha Ax_1+\beta Ax_2) = \alpha y^*(Ax_1) + \beta y^*(Ax_2)$ linear ✓

ii) $|y^*(Ax)| \le \|y^*\|\,\|Ax\| \le \underbrace{\|y^*\|\,\|A\|}_{常数}\|x\| = M\|x\|$ bounded ✓

∴ 可以这样定义

Theorem: $A \in B(X,Y) \Rightarrow A^* \in B(Y^*, X^*)$ 且 $\|A^*\| = \|A\|$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X^* & Y^* \arrow[l, "A^*"'] \end{tikzcd}$$

Proof: $\|A^*\| = \sup\limits_{\|y^*\|=1}\|A^*y^*\| = \sup\limits_{\|y^*\|=1}\Big(\sup\limits_{\|x\|=1}|\overset{\nearrow (A^*y^*,\, x)}{A^*y^*x}|\Big)$

$= \sup\limits_{\|y^*\|=1}\sup\limits_{\|x\|=1}|y^*Ax| = \sup\limits_{\|x\|=1}\Big(\sup\limits_{\|y^*\|=1}|\overset{\nearrow (y^*,\, Ax)}{y^*(Ax)}|\Big)$

$= \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\| = \|A\|$

↑

课本P39 由于 $\|y^*\| = \sup\limits_{Ax\neq 0}\dfrac{|y^*Ax|}{\|Ax\|} \Rightarrow \|Ax\| \geq \sup\limits_{y^*\neq 0}\dfrac{|y^*Ax|}{\|y^*\|}$

又 ∃ norming functional of $Ax \Rightarrow \exists y^*$ s.t. $|y^*Ax| = \|Ax\|$ $\|y^*\|=1$

∴ 上式取等 $\Rightarrow \|Ax\| = \sup\limits_{y^*\neq 0}\dfrac{|y^*Ax|}{\|y^*\|} = \sup\limits_{\|y^*\|=1}|y^*(Ax)|$

*

系元: 伴随的运算性质:

i) $(A+B)^* = A^* + B^*$

ii) $(\alpha A)^* = \alpha A^*$

iii) $(AB)^* = B^*A^*$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "BA"'] & Y \arrow[r, "B"] & Z \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X^* & Y^* \arrow[l, "A^*"'] & Z^* \arrow[l, "B^*"'] \arrow[ll, bend left, "(BA)^*"] \end{tikzcd}$$

称呼

取对偶: $X \Longmapsto X^*$

算子取对偶: $A \in B(X,Y) \Longmapsto A^* \in B(Y^*, X^*)$

(对偶/伴随/共轭算子)

Definition: $\overset{\text{range}}{\overset{\uparrow}{R}}(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ s.t. } y = Ax\}$ → 线性空间 (A的像集)

$\underset{\text{null space}}{\underset{\downarrow}{N}}(A) = \mathrm{Ker}(A) = \{x \in X \mid Ax = 0\}$ → 线性空间

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "A \in B(X,Y)"] \arrow[d, phantom, "\cup"] & Y \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
\mathrm{Ker}A & R(A) \\
X^* \arrow[d, phantom, "\cup"] & Y^* \arrow[l, "A^*"'] \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
R(A^*) & \mathrm{Ker}A^*
\end{tikzcd}$$

closed (之前讲 Hahn…时讲过)

$[\mathrm{Ker}A \ , \ R(A^*)] = 0$

$\quad\ \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$\quad (x \quad , \quad x^*)$

$[R(A) \ , \ \mathrm{Ker}A^*] = 0$

$\qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$\quad y \qquad , \qquad y^*$

Proof: 1° $\forall (\underset{\mathrm{Ker}A}{\underset{\cap}{x}}, \underset{R(A^*)}{\underset{\cap}{x^*}}) = (x, A^*y^*) = (\underbrace{Ax}_{\overset{\|}{0}}, y^*) = 0$

2° $\forall (\underset{R(A)}{\underset{\cap}{y}}, \underset{\mathrm{Ker}A^*}{\underset{\cap}{y^*}}) = (Ax, y^*) = (x, \underbrace{A^*y^*}_{\overset{\|}{0}}) = 0$ ♯

Annihilators (零化子)

对偶空间是对 normed space 而言的.

Definition: $S \subset X$ (normed space) $x^* \in X^*$ is called an annihilator of S if $x^*(x) = 0 \ \forall x \in S$.

$T \subset X^*$, we call $x \in X$ an annihilator of T if $x^*(x) = 0$, $\forall x^* \in T$

i.e. X (normed space) $\qquad X^*$

$\qquad \cup \qquad\qquad\qquad\qquad \cup$

$\qquad S \qquad\qquad\qquad\qquad T$

$S^\circ := \{x^* \in X^* \mid (x^*, S) = 0\}$

${}^\circ T := \{x \in X \mid (x, T) = 0\}$

Lemma: S° and ${}^\circ T$ are closed subspaces.
（零化子都是闭线性空间）

Proof: i) closed:

对 S° 法1: 取 $\{x_n^*\} \subset S^\circ$ Cauchy seq. ∵ $x_n^* \in X^*$ (Banach space)

∴ $\exists\, x^* \in X^*$ s.t. $x_n^* \xrightarrow{n\to\infty} x^*$

则 $\|x_n^*(x) - x^*(x)\| \le \|x_n^* - x^*\|\|x\| \to 0\ (n\to\infty)$ $\forall x\in X$

特别地对 $x\in S$ 有: $\|x_n^*(x)-x^*(x)\| \to 0\ (n\to\infty)$

则 $\|x^*(x)\|=0 \Rightarrow x^*(x)=0$ $\forall x\in S$ ∴ $x^*\in S^\circ$

法2: $S^\circ = \bigcap\limits_{s\in S}\{x^*\in X^* \mid x^*(s)=0\}$

由于映射
$$\begin{aligned} X^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x^* &\longmapsto x^*(s) \end{aligned}$$
连续

∴ 闭集的原像仍为闭集 $\Rightarrow \{x^*\in X^* \mid x^*(s)=0\}$ is closed

$\Rightarrow S^\circ = \bigcap\limits_{s\in S}\{x^*\in X^* \mid x^*(s)=0\}$ is closed（任意交也为闭集）

对 ${}^\circ T$ 同理

ii) subspaces:

对 S° $x_1^*, x_2^* \in S^\circ$

则 $(\alpha x_1^*+\beta x_2^*)(x) = \alpha x_1^*(x)+\beta x_2^*(x) = 0$ $\forall x\in S$

∴ $\alpha x_1^*+\beta x_2^* \in S^\circ$

推论:

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{对一般的 } M\subset X \text{ 也有 } M\subset {}^\circ(M^\circ)}$ ※

Lemma: If M is a closed subspace of X, then ${}^\circ(M^\circ) = M$.

Proof: i) $x\in {}^\circ(M^\circ) \Longleftrightarrow$ 对 $\forall x^*\in M^\circ$ 有 $x^*(x)=0$

而由于对 $\forall x\in M$. $\forall x^*\in M^\circ$ 有 $x^*(x)=0$

∴ $M\subset {}^\circ(M^\circ)$

ii) 要证对 $x_0\notin M \Rightarrow x_0\notin {}^\circ(M^\circ)$

取 $x_0\in X\setminus M$ 由于 M is closed $\Rightarrow d(x_0,M) = \inf\limits_{z\in M}\|x_0-z\|>0$

据 Chapter 2 Theorem 2.9 $\exists\, x^*\in X^*$ s.t. $\|x^*\|=1$, $x^*(x_0)=d$, $x^*(x)=0$ $(\forall x\in M)$

∴ $x^*\in M^\circ$ 而 $x^*(x_0)=d(x_0,M)>0$ 从而 $x_0\notin {}^\circ(M^\circ)$

综合 i), ii) 知 $M = {}^\circ(M^\circ)$

Lemma: $S \subset X$ (normed space) $\overline{\mathrm{span} S} = \overline{\{\sum_{\text{finite sum}} a_i s_i \mid a_i \in \mathbb{R}, s_i \in S\}} \subset X$, →闭包

then $\boxed{S^\circ = (\overline{\mathrm{span} S})^\circ}$ and $\overline{\mathrm{span} S} = {}^\circ(S^\circ)$

Proof: i) 事实: 若 $S_1 \subset S_2$ 则 $S_1^\circ \supset S_2^\circ$

则由于 $S \subset \overline{\mathrm{span} S} \Rightarrow (\overline{\mathrm{span} S})^\circ \subset S^\circ$

ii) 对 $x^* \in S^\circ$

$$(x^*, \mathrm{span} S) = (x^*, \sum_{i=1}^{n} a_i s_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i (x^*, s_i) = 0 \Rightarrow x^* \in (\mathrm{span} S)^\circ$$

又若 $\{x_n\} \subset \mathrm{span} S$ 且 $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ in $\overline{\mathrm{span} S}$

$$\|x^*(x_n) - x^*(x)\| \le \|x^*\| \|x_n - x\| \to 0 \ (n \to \infty) \Rightarrow x^*(x) = 0$$

从而 $(x^*, \overline{\mathrm{span} S}) = 0$ $x^* \in (\overline{\mathrm{span} S})^\circ$ $\therefore S^\circ \subset (\overline{\mathrm{span} S})^\circ$

综上: $S^\circ = (\overline{\mathrm{span} S})^\circ$

又 $\overline{\mathrm{span} S} \overset{\text{closed}}{\subset} X$ $\therefore {}^\circ((\overline{\mathrm{span} S})^\circ) = \overline{\mathrm{span} S}$

$\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{span} S} = {}^\circ((\overline{\mathrm{span} S})^\circ) = {}^\circ(S^\circ)$ #

Recall:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "A"] & Y \ \in B(X,Y) \\
\cup & \cup \\
\text{(closed) } \mathrm{Ker}A & R(A) \arrow[ddd, bend left] \\
X^* & Y^* \arrow[l, "A^*"'] \\
\cup & \cup \\
R(A^*) & \mathrm{Ker}A^* \text{ (closed)}
\end{tikzcd}$$

$(R(A), \mathrm{Ker}A^*) = 0$

$(y, y^*) = (Ax, y^*) = (x, \underbrace{A^*y^*}_{\overset{!!}{0}}) = 0$

此式对 $\forall y^*, \forall y$ 成立.

即 $R(A), \mathrm{Ker}A^*$ 互相"杀死"

特别地: ① $R(A) \subset {}^\circ(\mathrm{Ker}A^*)$ ② $\mathrm{Ker}A^* \subset (R(A))^\circ$

由于 Ker 本身是 closed 的特性. ② $\Rightarrow$ 加强为 ②' $\boxed{\mathrm{Ker}A^* = (R(A))^\circ}$

Pf: 已知 对 $y^* \in \mathrm{Ker}A^*$. $\forall y \in R(A)$ 有 其实就是体现为 $\mathrm{Ker}A^*$ 有具体的刻画 $A^*y^* = 0$

$(y^*, y) = (y^*, Ax) = (x, A^*y^*) = (x, 0) = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}A^* \subset (R(A))^\circ$

又 对 $y^* \in (R(A))^\circ$ $(y^*, Ax) = 0$ $\forall x \in X$ 相比之下 $R(A)$ (或任意其他算子的像空间没有这样的刻画

则 $(A^*y^*, x) = (y^*, Ax) = 0$ $\forall x \in X$. 由 x 任意性 $\Rightarrow A^*y^* = 0$

$\therefore y^* \in \mathrm{Ker}A^* \Rightarrow (R(A))^\circ \subset \mathrm{Ker}A^*$ #

①无法类似直接得到加强，从而有下述定理

注 ②可以加强的本质是因为 $\mathrm{Ker}A^*$ 是闭的 (由 A^* bounded 推出). 此点保证了 $\{y_n^*\} \subset \mathrm{Ker}A^*$ 其收敛点也在 $\mathrm{Ker}A^*$ 中 (由 $y_n^* \in \mathrm{Ker}A^*$ 且 $y_n^* \xrightarrow{n\to\infty} y^*$ 是可以推出 $y^* \in (R(A))^\circ$ 的)

Theorem 3.7 $R(A) = {}^{\circ}(\mathrm{Ker}A^*) \Longleftrightarrow R(A)$ is closed

Proof: $(\Rightarrow)$ $R(A) = {}^{\circ}(\mathrm{Ker}A^*)$ （事实上，零化子都是闭的，因此显然.）

$\Rightarrow R(A)$ is closed

$(\Leftarrow)$ $R(A)$ is closed 则 $R(A) \overset{closed}{\subset} Y$

从而 $R(A) = {}^{\circ}(R(A)^{\circ}) \overset{②}{=} {}^{\circ}(\mathrm{Ker}\,A^*)$

The inverse operator

问题引入：考虑求解方程 $Ax = y$，其中 $A \in B(\overset{\nearrow}{X}, \overset{\uparrow}{Y})$ normed space

i) 若 $Y = R(A)$，则对 $\forall y \in Y$ 有解 （满射 surjective ）

ii) 若 $\mathrm{Ker}A = 0$ (i.e. $\{0\}$ 0空间)，则每个解唯一（单射 injective）

（∵若 $Ax_1 = y$ 且 $Ax_2 = y \Rightarrow A(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ ）

实际应用时会考虑若 y_1 与 y_2 足够接近，解出的 x_1, x_2 能否也足够接近？

用逆算子可以解决这个问题（此问题 $\Leftrightarrow A^{-1}$ 是否连续 $\Leftrightarrow A^{-1}$ 是否有界）

Theorem 3.8: If X, Y are Banach spaces, $A \in B(X, Y)$ with $R(A) = Y$, $\mathrm{Ker}A = \{0\}$, then $A^{-1} \in B(Y, X)$

以此定理的证明为目标，我们做以下准备工作：

Definition:

① nowhere dense sets（无处稠密集）

$W \subset X$ is called nowhere dense if $\overline{W}$ contains no non-open subset （非空开集） 在赋范空间中就是开球

(i.e. $\forall U (\neq \emptyset) \subset X$, U 为开集, $\exists x \in U$, $x \neq \overline{W}$ 也即 $\boxed{U \neq \overline{W}}$)

Remark: W nowhere dense $\Leftrightarrow$ $\overline{W}$ nowhere dense

（∵ $\overline{(\overline{W})} = \overline{W}$ ）

③ X is called of the first category (第一纲集) 若

$X = \bigcup_k W_k$, W_k are nowhere dense　　例: $\mathbb{Q}$ 是第一纲集 (单点集无处稠密)

(i.e. X 可表达成可列个无处稠密集的并)

否则, call X of the second category (第二纲集)

* 度量空间与赋范空间相差一个 $|\alpha|\|x\|=\|\alpha x\|$ 条件, 度量空间可以不完备

norm 可以定义度量

Theorem 3.9 $\boxed{\text{Baire's category (纲) theorem}}$

If X is complete (Banach space) $\Rightarrow$ X is of the second category.

$\Rightarrow$ 紧致度量空间 $\Rightarrow$ 完备

(Remark: Compact metric space is of the second category)

Proof: 假设 X 是第一纲集. 则 $X = \bigcup\limits_n^{\infty} W_n$　W_n nowhere dense

W_1 nowhere dense $\Rightarrow \exists\, x_1 \in X$ 和 $0<r_1<1$ s.t.

$$\overline{B(x_1;r_1)} \cap \overline{W_1} = \phi$$

又 $B(x_1;r_1) \not\subset \overline{W_2}$　$\therefore \exists\, x_2 \in B(x_1;r_1)$ 和 $0<r_2<\frac{1}{2}$ s.t.

$\overline{B(x_2;r_2)} \cap \overline{W_2} = \phi$ 且 $B(x_2;r_2) \subset B(x_1;r_1)$

依此类推. $\exists\, x_n \in B(x_n;r_n)$ 和 $0<r_n<\frac{1}{n}$ s.t.

$\overline{B(x_n;r_n)} \cap \overline{W_n} = \phi$　且 $B(x_n;r_n) \subset B(x_{n-1};r_{n-1})$

从而 $\|x_m - x_n\| < r_n$ $(\forall m>n)$　$r_n \to 0$ $(n\to\infty)$

$\therefore \{x_n\}$ 是 X 中 Cauchy seq. 由于 X 完备 $\Rightarrow \exists\, x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x \in X$

且 $x \in \overline{B(x_n;r_n)}$ $\forall n$　$\therefore x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} W_k$ 矛盾　#

Remark: 完全类似地可以证明: 完备的度量空间是第二纲集

补充: 紧致度量空间是完备的 ($\Rightarrow$ 紧致度量空间是第二纲集)

Pf: 紧致度量空间 X 是列紧的. 取 Cauchy seq. $\{x_n\} \subset X$

即 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N>0$, $n,m>N$ 时 $d(x_n,x_m)<\varepsilon$　$\Downarrow$ 这里即证明了本章后段的一个 Lemma: Cauchy seq 的子列收敛则其本身也收敛.

列紧: $\exists \{x_{n_k}\}$ 收敛 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$

即 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N'>0$　$n_k>N'$ 时 $d(x_{n_k},x_0)<\varepsilon$

$\Rightarrow$ 取 $\max\{N,N'\} = \tilde{N}$　当 $n>\tilde{N}$ 时

$d(x_n,x_0) \le \underbrace{d(x_n,x_{n_k})}_{\text{某个 } n_k>\tilde{N}} + d(x_{n_k},x_0) < 2\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ $\therefore$ 完备

#

Definition:

X, Y normed space

X

$\cup$ linear operator

$D(A) \xrightarrow{A} Y$

A is called (closed), if graph of A is closed in $X \times Y$

事实上: $G(A)$ is closed $\Leftrightarrow$ $\underset{\in G(A)}{(x_n, Ax_n)} \longrightarrow \overset{\in X\times Y}{(x,y)}$ 则 $(x,y) \in G(A)$

$G(A)$ ↳ graph

以上等价于下面可操作性的描述: → 没有要求 $x \in D(A)$ 最后推出来 $x \in D(A)$

△ $\boxed{A \text{ is closed} \Leftrightarrow \forall x_n \in D(A) \text{ 只要 } x_n \xrightarrow{\text{in } X} x \text{ 且 } Ax_n \xrightarrow{\text{in } Y} y \text{ 则 } x \in D(A) \;\&\; y = Ax}$

⇓

~~即A闭 要求 定义域也闭，值域也闭~~ 错误!!!

⇓

推不出 $D(A)$ 闭.

☹ $D(A)$ closed 要求对任

$\subset D(A)$ 有 $\lim_n x_n \in D(A)$

Remark: ① 所有的 $A \in B(X,Y)$ 都是闭的 (bounded linear)

△ ② 若 A is closed ⇒ KerA is closed

(考虑 $D(A) \subset X$)

注: 之前没有限制 A closed 也得出 KerA closed 是因为之前一直考虑的是 $A \in B(X,Y)$

即 $D(A) = X$, 极限点自然落在全空间 X 中 也即之前都隐含了 ① 作为条件.

但今后要考虑 $D(A) \subset X$ 就需讨论 A 是否 closed.

而这里要求 $\begin{cases} x_n \xrightarrow{\text{in } X} x \\ Ax_n \xrightarrow{\text{in } Y} y \end{cases}$ 这样时 $\{x_n\}$ 不是任意的

事实上 ② 还可以加强一点.

△③: $\boxed{A \text{ linear operator}}$ (没有 bounded 条件) 且 $\boxed{A \text{ closed}}$

⇒ KerA closed

Pf: 取 $\{x_n\} \subset \text{Ker}A$ $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ (x 不仅在 $D(A)$ 中)

则 $Ax_n = 0$ 也即 $Ax_n \to 0$ $(n \to \infty)$

由 A closed 的定义 $x \in D(A)$ & $Ax = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}A$. #

Theorem (closed graph theorem) X, Y are both Banach space, if $A: X \to Y$ ($D(A) = X$) is closed linear operator, then A is bounded.

Proof: $\boxed{\text{目标}}$ 已知 $\|A\| = \sup\limits_{\substack{x\neq 0 \\ \|x\|=r}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ 只与 x 的方向有关，与长度无关 $\Longrightarrow$ r 可以任意指定

则只要证 $\|x\|<r$ 时有 $\|Ax\|<M$（有界）就可以推出 $\|A\|$ 有界，A bounded

$\boxed{\text{思路}}$: X Banach space $\to$ 2^{nd} category $\Rightarrow$ 找到一个开球 $B(x_0,t)$ (*) 包含于 $U_n=\{x\in X \mid \|Ax\|<n\}$ 的闭包 $\overline{U_n}$ 中 但由于 A linear operator 没有连续性，因此 $\overline{U_n}$ 的结构无法了解（不一定等于 $\{x\in X \mid \|Ax\|\le n\}$）

故 $B(x_0,t)\subset\overline{U_n}$ 没法推出 $\|Ax\|$ 有界，因此需要放大 $\overline{U_n}$ 到某个 $\overline{U_m}$

(*) 将 $B(x_0,t)$ 平移到原点 $B(0,r)$ 即形成了对 $\|x\|<r$ 的描述

只有在 U_m 内部才能推出 $\|Ax\|<m$ 从而达到目标

正式 Proof: 令 $U_n=\{x\in X \mid \|Ax\|<n\}$ $(n\in\mathbb{R})$

则 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}U_n$

X Banach space $\Rightarrow$ X is of the second category

$\therefore$ $\exists n$ s.t. $\exists x_0, t>0$ 有 $B(x_0,t)\subset\overline{U_n}$

claim1: $\exists M>0$ s.t. $B(0,t)\subset\overline{U_M}$（平移到原点）

验证: 任取 $z\in B(0,t)$ 则 $z+x_0\in B(x_0,t)\subset\overline{U_n}$

$\therefore \exists \{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset U_n$ s.t. $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=z+x_0$ 即 $x_k-x_0\xrightarrow{k\to\infty}z$

$$\|A(x_k-x_0)\|\le\underbrace{\|Ax_k\|}_{x_k\in U_n}+\underbrace{\|Ax_0\|}_{}<n+\underbrace{\|Ax_0\|}_{\text{固定的}}\overset{\text{记}}{=}M$$

$\therefore$ $x_k-x_0\in U_M$

则 $z=\lim\limits_{k\to\infty}(x_k-x_0)\in\overline{U_M}$

claim2: 对 $\forall\alpha>0$ $B(0,\alpha t)\subset\overline{U_{\alpha M}}$（有伸缩性）特别地: $B(0,\underbrace{\tfrac{t}{M}}_{\text{记为}r})\subset\overline{U_1}$

验证: $\forall y\in B(0,\alpha t)\Longleftrightarrow \frac{y}{\alpha}\in B(0,t)\subset\overline{U_M}$

$\therefore\exists\{y_k\}_{k=1}^{\infty}\subset U_M$ s.t. $y_k\xrightarrow{k\to\infty}\frac{y}{\alpha}\Rightarrow \alpha y_k\xrightarrow{k\to\infty}y$

又 $y_k\subset U_M\Rightarrow\|Ay_k\|<M\Rightarrow\|A(\alpha y_k)\|<\alpha M\Rightarrow\alpha y_k\in U_{\alpha M}$

$\therefore$ $y=\lim\limits_{k\to\infty}\alpha y_k\in\overline{U_{\alpha M}}$

claim 3: 任意取定 $\delta\in(0,1)$ 有 $B(0,r)\subset U_{\frac{1}{1-\delta}}$ （去掉了闭包）

① 对 $\forall z\in B(0,r)\subset\overline{U_1}$ 给定 $\delta\in(0,1)\Rightarrow\exists x_1\in U_1$ s.t. $z-x_1\in B(0,\delta r)\subset\overline{U_\delta}$

② $\exists x_2\in U_\delta$ s.t. $z-x_1-x_2\in B(0,\delta^2 r)\subset\overline{U_{\delta^2}}$

③ $\exists x_3\in U_{\delta^2}$ s.t. $z-x_1-x_2-x_3\in B(0,\delta^3 r)\subset\overline{U_{\delta^3}}$

⋮

ⓝ $\exists x_n\in U_{\delta^{n-1}}$ s.t. $z-\sum_{i=1}^{n}x_i\in B(0,\delta^n r)\subset\overline{U_{\delta^n}}$

$$\text{则}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\|z-\sum_{i=1}^{n}x_i\|<\delta^n r\\ \|Ax_n\|<\delta^{n-1}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n}x_i\xrightarrow{n\to\infty}z\text{ in }X\\ \|Ax_n\|<\delta^{n-1}\end{array}\right.$$

又 $\|\sum_{m\le i\le n}Ax_i\|\le\sum_{m\le i\le n}\|Ax_i\|<\sum_{m\le i\le n}\delta^{i-1}$ （收敛级数的尾巴）

$\therefore\ \{\sum_{i=1}^{n}Ax_i\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy seq in Y.

Y Banach space $\Rightarrow\exists y\in Y$ s.t. $A\sum_{i=1}^{n}x_i\xrightarrow{n\to\infty}y$ in Y

$$\text{即}\left\{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n}x_i\xrightarrow{n\to\infty}z\text{ in }X\\ A\sum_{i=1}^{n}x_i\xrightarrow{n\to\infty}y\text{ in }Y\end{array}\right.\xrightarrow{\text{由}A\text{ closed}}y=Az$$

$$\therefore\ \|Az\|=\|y\|=\lim_{n\to\infty}\|A\sum_{i=1}^{n}x_i\|\le\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\|Ax_i\|=\sum_{i=1}^{\infty}\|Ax_i\|<\sum_{i=1}^{\infty}\delta^{i-1}=\frac{1}{1-\delta}$$

$\Rightarrow\ z\in U_{\frac{1}{1-\delta}}$

即 $\forall z\in B(0,r)\Rightarrow z\in U_{\frac{1}{1-\delta}}\Rightarrow B(0,r)\subset U_{\frac{1}{1-\delta}}$ 得证目标 #

定理应用:

Theorem 3.8: If X,Y are Banach spaces, $X\xrightarrow{A\in B(X,Y)}Y$ with $\mathrm{Ker}A=\{0\}$ & $\mathrm{Im}A=Y$, then A^{-1} is bounded (i.e. $A^{-1}\in B(Y,X)$)

Proof: $A\in B(X,Y)\Rightarrow A$ closed (见前的 Remark)

($\because$ 取 $\{x_n\}\subset X$ 且 $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ 由于 X 是全空间 $\Rightarrow x\in X$
且由 A bounded $\Rightarrow A$ 连续 $\Rightarrow Ax_n\xrightarrow{n\to\infty}Ax=y\in Y\Rightarrow A$ closed)

A closed $\Rightarrow\ G(A)=\{(x,Ax)\mid x\in X\}\subset X\times Y$ closed

$\Rightarrow\ G(A^{-1})=\{(Ax,x)\mid x\in X\}\subset Y\times X$ closed

由 closed graph theorem (CGT) $\Rightarrow A^{-1}\in B(Y,X)$

#

在上述定理条件下有: $\|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\|\|y\| \quad y \in Y$

则 $\|x\| = \|A^{-1}\underbrace{Ax}_{y}\| \leq \|A^{-1}\|\|Ax\| \Rightarrow \|Ax\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|}$

综合 $A \in B(X,Y)$ 得到: $\boxed{\frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} \leq \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|}$

Definition: Two normed spaces X, Y are called $\boxed{\text{isomorphic(同构)}}$

if: $\exists T: X \to Y$ 和 $S: Y \to X$ bounded linear operators s.t.

$ST = id_X$ & $TS = id_Y$

其等价定义为: X, Y normed spaces

如 $\tan x, x \in [0, \frac{\pi}{2})$

$X \xrightarrow{T} Y$ T is linear, bijective 且 $\exists M_1, M_2$ s.t.

双射

图像闭 并 投影闭

$M_1\|x\| \leq \|Tx\| \leq M_2\|x\|$

(注): A closed 与 D(A) closed 不是一回事 (见上一个 Remark)

Theorem 3.11 X, Y Banach spaces A: closed linear operator

$$\begin{tikzcd} X \\ D(A) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "A"] & Y \end{tikzcd}$$

单射 满射

, then $A^{-1}: Y \to D(A)$ is bounded 在 $\|\cdot\|_X$ 范数意义下

Proof: 想要用 CGT, 需证 $D(A)$ is Banach space

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & \text{Banach spaces} \\ D(A) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "A"] & Y \arrow[u] \end{tikzcd}$$

claim: $D(A)$ is Banach space $\Rightarrow$ $\boxed{\text{需证}}$ ☆ A closed $\Rightarrow$ D(A) Banach space

在 $D(A)$ 上定义一个新的范数: $\boxed{\|x\|_A = \|x\|_X + \|Ax\|_Y}$ $\Rightarrow \|x\|_A$ is well-defined

验证: $\|x\|_A = 0 \Rightarrow \|x\|_X = 0, \|Ax\|_Y = 0 \Rightarrow x = 0, Ax = 0$ ✓

$\forall \alpha > 0, \|\alpha x\|_A = \|\alpha x\|_X + \|A\alpha x\|_Y = \alpha(\|x\|_X + \|Ax\|_Y) = \alpha\|x\|_A$ ✓

$\|x+y\|_A = \|x+y\|_X + \|A(x+y)\|_Y \leq \|x\|_A + \|y\|_A$ ✓

对 $\forall \{x_n\} \subset D(A)$ 在 $\|\cdot\|_A$ 意义下的 Cauchy seq:

$\|x_n - x_m\|_A = \|x_n - x_m\|_X + \|Ax_n - Ax_m\|_Y$

则 $\{x_n\}, \{Ax_n\}$ 分别是 X, Y 中在 $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ 意义下的 Cauchy seq.

X, Y Banach space $\Rightarrow \exists x, y$ $\underset{(\|\cdot\|_X)}{\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X}$. $\underset{(\|\cdot\|_Y)}{\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax}$

则 $\|x_n - x\|_A = \|x_n - x\|_X + \|Ax_n - Ax\| \to 0 \ (n \to \infty)$ $\quad \overset{\lim_{n\to\infty} Ax_n}{\shortparallel}$

又 A closed $\Rightarrow \begin{cases} x_n \xrightarrow{\text{in } X} x \\ Ax_n \xrightarrow{\text{in } Y} Ax \end{cases} \Rightarrow x \in D(A)$ & $y = Ax$

$\therefore D(A)$ is Banach space

$$\begin{tikzcd} \therefore (D(A), \|\cdot\|_A) \arrow[r, hook, two heads, "A"] & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A^{-1}: Y \arrow[r, hook, two heads] \arrow[rr, bend left] & (D(A), \|\cdot\|_A) & \text{Banach} \end{tikzcd}$$

A closed $\Rightarrow$ A^{-1} closed $\overset{CGT}{\Longrightarrow}$ A^{-1} is bounded $(\|\cdot\|_A)$

即 $\exists M>0$ s.t. $\|A^{-1}y\|_A = \underbrace{\|A^{-1}y\|_X + \|AA^{-1}y\|_Y}_{\swarrow} \le M\|y\|_Y$

$\Rightarrow \|A^{-1}y\|_X \le (M-1)\|y\|_Y = M\|y\|_Y$ 最后去掉了 $\|\cdot\|_A$

$\therefore A^{-1} \in B(Y, X)$

#

回顾：以上我们已证明了3个定理：

① $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] & Y \\ \text{Banach space} \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

A: closed linear operator $\Rightarrow$ A is bounded (closed graph theorem)

② $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, two heads, "A"] & Y \\ \text{Banach} \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

A: closed $\Rightarrow A^{-1}$ closed / or / bounded $\Rightarrow$ A closed $\overset{\Vert}{}$ A^{-1} closed; linear operator $\Rightarrow A^{-1}$ is bounded $\Updownarrow$ X 与 Y 同构

③ $$\begin{tikzcd} X & \text{Banach} \arrow[l] \arrow[d] \\ D(A) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, hook, two heads, "A"] & Y \end{tikzcd}$$

A: closed linear operator $\Rightarrow A^{-1}$ is bounded

Operators with closed ranges

(ranges $\to$ 像 R(A))

之前已讲过 R(A) closed $\Rightarrow$ $R(A) = {}^{\circ}(\mathrm{Ker}A^{*})$

故 R(A) closed 是很好的条件，下面我们想找其充要条件

Theorem 3.12 X, Y Banach spaces, A is closed linear operator & injective(单射). Then $\overset{(\mathrm{Im}A)}{R(A)}$ closed $\Leftrightarrow$ $\exists c>0$ s.t. $\|Ax\| \ge c\|x\|$ $(\forall x \in D(A))$

Proof:

$$\begin{tikzcd} X & \text{由定义} & Y \\ D(A) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[rr, hook, two heads, "A", "\text{closed}"'] & & \mathrm{Im}A \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

由题意，单射是条件. $D(A) \to \mathrm{Im}A$ 自然是满射

$\therefore A: D(A) \to \mathrm{Im}A$ 双射.

(⇒) $\mathrm{Im}A$ closed ⇒ $\mathrm{Im}A$ complete (Banach space) ← 在 $\|\cdot\|_Y$ 下

又由上一定理推论知 $\boxed{A \text{ closed}}$ ⇒ $D(A)$ Banach space

∴ 考虑 $D(A) \xrightarrow{A} \mathrm{Im}A$ 由 CGT ⇒ A^{-1} is bounded

∴ $\|A^{-1}y\| \leq \|y\| \cdot M \quad y \in \mathrm{Im}A$

↓ y 换成 Ax $\quad (M \neq 0)$

$\Leftrightarrow \|A^{-1}Ax\| \leq \|Ax\| \cdot M \quad x \in D(A)$ 即 $\|x\| \leq M\|Ax\| \quad x \in D(A)$

$\Rightarrow \|Ax\| \geq C\|x\| \quad C = \frac{1}{M} \quad \forall x \in D(A)$

(⇐) 要证 $\mathrm{Im}A$ closed

取 $\{y_n\} \subset \mathrm{Im}A \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ 要证 $y \in \mathrm{Im}A$

∵ $y_n \in \mathrm{Im}A$ ∴ $x_n := A^{-1}y_n \in D(A)$

且 $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{C}\|A(x_n - x_m)\| = \frac{1}{C}\|y_n - y_m\| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$

∴ $\{x_n\}$ 也是 $D(A)$ 中的 Cauchy seq.

(又 ~~A closed ⇒ D(A) Banach~~) X Banach space

(∴ ~~∃x s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 且 x∈D(A)~~) ∴ $\exists x \in X$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

则由 $\boxed{A \text{ closed}}$:
$$\begin{cases} x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \text{ in } X \\ \underset{\overset{\shortparallel}{y_n}}{Ax_n} \xrightarrow{n\to\infty} y \text{ in } Y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x \in D(A) \\ \& \\ y = Ax \in \mathrm{Im}A \end{matrix}$$
得证 #

试想能否去掉 injective 的条件? 下面寻找没有此假设时 $\mathrm{Im}A$ closed 的充要条件.

为此,先定义一个商空间:

Quotient spaces:

X normed space $\quad M \underset{\text{subspace}}{\overset{\text{closed}}{\subseteq}} X \quad$ Define an equivalent relation

$\sim_M$ on X: $\quad x \sim_M y \Leftrightarrow x - y \in M \quad (x, y \in X)$

容易验证: ① $x \sim_M x$ ③ $x \sim_M y \Rightarrow y \sim_M x$ ③ $x \sim_M y, y \sim_M z \Rightarrow x \sim_M z$ OK

实际上: $[x] = x + M = \{x + m \mid m \in M\}$

(若将 $(X, +)$ 看作一个 Abel group, 则 $(M, +)$ 是一个 Abel subgroup. $[x] = x + M$ 是一个 coset)

记 $X/M = \{[x] \mid x \in X\}$

Claim X/M is a vector space with respect to

i) $[x_1]+[x_2]=[x_1+x_2]$ ii) $[\alpha x]=\alpha[x]$

先验证 i) ii) well-defined

若 $[x]+[y]=[x+y]$ 令 $x' \sim x$ $y' \sim y$ 则 $[x']+[y']=[x'+y']$

$\because x'+y' \sim x+y$ $\therefore [x+y]=[x'+y']$ $\therefore$ well-defined

ii) 同理 OK. vector space 显然..

现在在 X/M 上定义范数 $\boxed{\|[x]\| = \inf_{z\in[x]}\|z\| = \inf_{y\in M}\|x-y\| = d(x,M)}$

⚠注意. 这一点没有 M closed 推不出来

验证其是范数: $\boxed{\text{i) } \|[x]\|=0 \Rightarrow d(x,M)=0}$ $\exists\, y_n \in M$ s.t.

$\|x-y_n\| \xrightarrow{n\to\infty} d(x,M)=0$ 即 $\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|=0$ $\Rightarrow$ i.e. $y_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ 由 M closed $\Rightarrow x \in M = [0]$ $\Downarrow$ $[x]=[0]$

(又 $M \overset{\text{closed}}{\subset} X$ (Banach space) $\therefore$ M: Banach space

$\therefore \exists\, y \in M$ s.t. $\lim_{n\to\infty}\|y_n - y\|=0 \Rightarrow \|x-y_n-(x-y)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow \|x-y\| = \lim_{n\to\infty}\|x-y_n\| = 0$ $\therefore x = y \in M \overset{=[0]}{} \Rightarrow [x]=[0]$) OK

ii) $\|[\alpha x]\| = \inf_{y\in M}\|\alpha x - y\| = \inf_{y\in M}|\alpha|\|x-\frac{y}{\alpha}\| = \inf_{y'\in M}|\alpha|\|x-y'\| = |\alpha| d(x,M)$

$= |\alpha|\cdot\|[x]\|$ OK

iii) $\|\underset{\substack{\|\\ {[x+y]}}}{[x]+[y]}\| = \inf_{z\in M}\|x+y-z\|$ (*)

任取 $z_1+z_2=z$, $z_1,z_2\in M$. 则

$(*) = \inf_{z\in M}\|x+y-z\| = \inf_{z\in M}\|x-z_1+y-z_2\| \le \inf_{z_1\in M}\|x-z_1\| + \inf_{z_2\in M}\|y-z_2\|$

$= \|[x]\| + \|[y]\|$ OK.

$\therefore$ X/M is a normed space.

以上我们证明了:

X/M 可以关于适当定义的范数成为 normed space

$\boxed{M \underset{\text{subspace}}{\overset{\text{closed}}{\subset}} X \text{ (normed space)} \Rightarrow X/M \text{ is a normed space}}$

Theorem 3.13: If M is a closed subspace of a Banach space X, then X/M is a Banach space. ☆仅用在商空间范数的定义上.

(难) **Proof**: 取 $\{[x_n]\} \subset X/M$ Cauchy seg 要证 $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n]$ 存在且在 X/M 中.

Lemma 3.15: If a subsequence of a Cauchy sequence coverges, then the whole sequence converges.

验证: 取 $\{x_n\}$ Cauchy seg in X (normed space)

∴对 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N\geq 0$. $m,n>N$ 时 $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$

若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ 则对上述 $\varepsilon>0$ $\exists M>0$. $n_k>M$ 时 $\|x_{n_k}-x\|<\varepsilon$

$\Rightarrow$ 取 $\hat{N}=\max\{N,M\}$ 则 $n>\hat{N}$ 时 $\|x_n-x\| \leq \|x_n-x_{\hat{N}}\|+\|x_{\hat{N}}-x\| < 2\varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ※

故只需证明 ∃ $\{[x_n]\}$ 的子列极限在 X/M 中. 下面证明:

$\{[x_n]\}$ Cauchy seg $\Rightarrow \forall \varepsilon>0$ $\exists N>0$. $m,n>N$ 时 $\|[x_n]-[x_m]\|<\varepsilon$

① 为了更具体地刻[画 $[x_n]$, $[x_m]$ 足够接近, 我们分别令 $\varepsilon=\frac{1}{2^k}$

则 $\exists N(k)>0$ s.t. $m,n>N(k)$ 时 $\|[x_n]-[x_m]\|<\frac{1}{2^k} \Rightarrow \|[x_{N(k)}]-[x_{N(k+1)}]\|<\frac{1}{2^k}$

令 $u_k = x_{N(k)}$ 则 $\|[u_{k+1}]-[u_k]\|<\frac{1}{2^k}$ (*) $\{[u_k]\}$ 构成 $\{[x_n]\}$ 的一个子列

(至此我们达到了目的①, 为了达到它我们取出了 $\{[x_n]\}$ 的一个子列. 下面就证这个子列极限存在)

由(*) $\|[u_{k+1}]-[u_k]\| = \|[u_{k+1}-u_k]\| = \inf\limits_{z\in M}\|u_{k+1}-u_k+z\| < \frac{1}{2^k}$

$\therefore \exists z_k\in M$ s.t. $\|u_{k+1}-u_k+z_k\|<\frac{1}{2^k}$ 记 $v_k=u_{k+1}-u_k+z_k \Rightarrow \|v_k\|<\frac{1}{2^k}$

② 接下来要找到 X 中一个 Cauchy seg. 利用 X 的完备性找出相应的极限, 对应到 X/M 中

考虑 $w_n=\sum\limits_{k=1}^{n} v_k \in X$ $\qquad w_n = u_{n+1}-u_1+\sum\limits_{k=1}^{n} z_k$

则 $\|w_n-w_m\| = \|\sum\limits_{k=m+1}^{n} v_k\| \leq \sum\limits_{k=m+1}^{n}\frac{1}{2^k} = \dfrac{\frac{1}{2^{m+1}}\left[1-(\frac{1}{2})^{n-m-1}\right]}{1-\frac{1}{2}} \to 0$ $(n,m\to\infty)$

$\therefore \{w_n\}$ Cauchy seg in X (Banach space)

$\therefore \exists w\in X$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$ 即 $\|w_n-w\|\to 0$ $(n\to\infty)$

则 $\|[u_n]-[u_1+w]\| \leq \|u_n-u_1-w+\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n-1} z_k}_{\in M \text{ (subspace)}}\| = \|w_{n-1}-w\| \to 0$ $(n\to\infty)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}[u_n] = [u_1+w] \in X\backslash M$

由 Lemma, $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n] = [u_1+w]$ ∴ X/M Banach space ※

此定理证明思路：不妨考虑 $X=\mathbb{R}^2$, $M=\mathbb{R}$

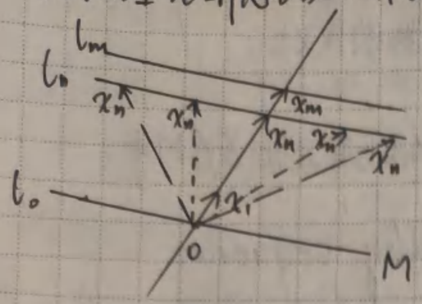


图1

落在 $l_0, l_1, \cdots l_n, l_m$ 上的每个向量是一个等价类 $[x_0],[x_1],\cdots[x_n],[x_m]$

想要将 $\{[x_n]\}$ Cauchy seq 化为 X 中的 Cauchy seq.

首先肯定想要 $[x_n]$ $[x_{n+1}]$ 距离足够小（越来越小）

为此我们取了一个相邻距离递缩的子列 $\{[u_n]\}$

⇓ 取子列

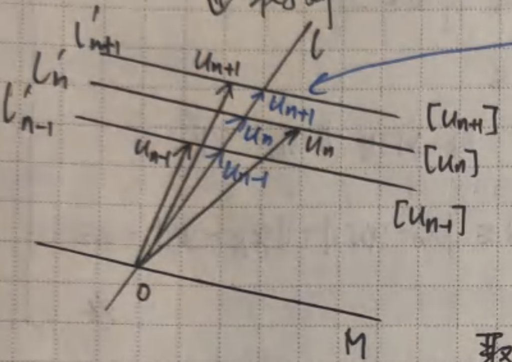


图2

但是遇到了新问题. u_n 可能在 l_n' 上的任何位置.

Demand

显然.如果我们能把 $\{u_n\}$ 都锁定在一个方向 l 上
其自动成为 X 中 Cauchy seq.

这时我们观察到 $\|[u_n]-[u_{n+1}]\|$ 的定义

$$\Rightarrow \|[u_n]-[u_{n+1}]\| \leq \|\underline{u_{n+1}-u_n+z_n}\| \quad \forall z_n \in M$$

看成 $(u_{n+1}+z_n)-u_n$, z 相当于 M 方向的一个扰动

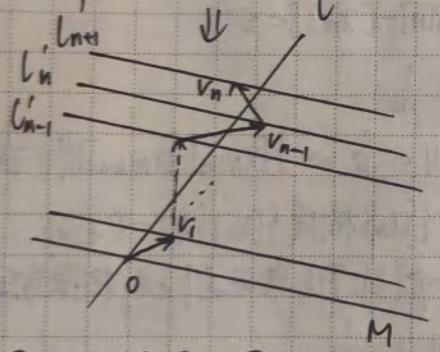
取合适的 z 可以使 $(u_{n+1}+z_n)-u_n$ 的方向靠近 l

记 $v_n = u_{n+1}+z_n-u_n$

发现取 $W_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ 可以很顺地取出满足 Demand 的序列 $\{W_n\}$. 验证发现 $\{W_n\}$ 确实是 Cauchy seq. in X

再通过其极限找 $[u_n]$ 的极限是容易的

⇓



应用

（本质是在没有单射的条件下创造了一个单射）

Theorem 3.14: X, Y Banach spaces, A is closed linear operator. then $\mathrm{Im}A$ is closed $\Longleftrightarrow$ $\exists C>0$ s.t. $\|Ax\| \geq c\|[x]\|_{X/\mathrm{Ker}A}$, $\forall x \in D(A)$

Proof:

$$\begin{tikzcd}
 & X & & Y \\
 & \cup & & \cup \\
 & D(A) \arrow[rr, "\overset{\text{closed}}{A}"] \arrow[ddr, "q"] & & \mathrm{Im}A \\
 & \cup & & \\
 & \mathrm{Ker}A & & \\
X/\mathrm{Ker}A \supset & & D(A)/\mathrm{Ker}A \arrow[uuur, dashed, "\hat{A}"'] &
\end{tikzcd}$$

考虑商空间 $X/\mathrm{Ker}A$

由 A closed $\Rightarrow$ KerA closed

$$\left(\because \{x_n\} \subset \mathrm{Ker}A \quad \lim_{n\to\infty} x_n \overset{\text{记}}{=} x \quad Ax_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_n \to x \text{ in } X \\ Ax_n \to 0 \text{ in } Y \end{cases} \text{A closed} \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}A \ \& \ Ax = 0 \right)$$

∴由上述定理：$X/\mathrm{Ker}A$ 是 Banach space

$$\begin{tikzcd}
X/\mathrm{Ker}A \arrow[r] & \text{Banach} & Y \arrow[l] \\
\cup & & \cup \\
D(A)/\mathrm{KerA} \arrow[rr, hook, two heads, "\hat{A}"] & & \mathrm{Im}A \\
{[x]} \arrow[rr, mapsto] & & \hat{A}[x] \\
& & \shortparallel \\
& & Ax
\end{tikzcd}$$

由映射的定义

定义 $\hat{A}: D(A)/\mathrm{Ker}A \longrightarrow \mathrm{Im}A$ $\quad \hat{A}[x] = Ax$ 这一定义是自然的

则 $\hat{A}$ 满射. 且单射 (群同态基本定理)

∵ 若 $[x_1] \neq [x_2]$ 则 $\hat{A}[x_1] \neq \hat{A}[x_2]$

否则 $\hat{A}[x_1] = \hat{A}[x_2] \Rightarrow A(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}A$

$\therefore [x_1 - x_2] = [0] \Rightarrow [x_1] = [x_2]$ 矛盾

$D(A)/\mathrm{Ker}A$ 的效果:

本来有 $\{x_n\} \subset D(A)$ s.t.

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[dr] & \\
x_2 \arrow[r] & y \in \mathrm{Im}A \\
\vdots & \\
x_n \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

取商空间后 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 互相等价

∵ $\forall i, j$ $x_i - x_j \in \mathrm{Ker}A$ $\Rightarrow [x_i] = [x_j]$

从上推出 $\hat{A}$ 为双射. 因此受 Theorem3.12 启发

只要证明了 $\hat{A}$ is closed linear operator, 再对

$\hat{A}: X/\mathrm{Ker}A \longrightarrow \mathrm{Im}A$ 使用 Theorem3.12 即可完成证明

下面用 A closed 推出 $\hat{A}$ closed:

取 $\{[x_n]\} \subset D(A)/\mathrm{Ker}A$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n] = [x]$, $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{A}[x_n] = y$

$$\lim_{n\to\infty}[x_n] = [x] \Longleftrightarrow \|[x_n] - [x]\| = \|[x_n - x]\| = \inf_{z \in \mathrm{Ker}A}\|x_n - x + z\| \longrightarrow 0 \ (n\to\infty)$$

$\therefore \exists \{z_n\} \subset \mathrm{Ker}A$ s.t. $\|x_n - x + z_n\| \longrightarrow 0 \ (n\to\infty)$

即 $x_n + z_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

$$\hat{A}[x_n + z_n] = A(x_n + z_n) = Ax_n \longrightarrow y \text{ in } Y \qquad (\shortparallel \ \hat{A}[x_n] \ \downarrow)$$

则 $\begin{cases} x_n + z_n \xrightarrow{n\to\infty} x \text{ in } X \\ A(x_n + z_n) \xrightarrow{n\to\infty} y \text{ in } Y \end{cases} \overset{A \text{ closed}}{\Longrightarrow} x \in D(A)$ & $y = Ax = \hat{A}[x]$

而 $x \in D(A) \Longleftrightarrow [x] \in D(A)/\mathrm{Ker}A$

∴ 我们由 $\begin{cases} [x_n] \longrightarrow [x] \text{ in } X/\mathrm{Ker}A \\ \hat{A}[x_n] \longrightarrow y \text{ in } Y \end{cases}$ 推出了 $[x] \in D(A)/\mathrm{Ker}A$ & $y = \hat{A}[x]$

故 $\hat{A}$ is closed. 从而定理得证 #

回顾以上我们证明的两个定理:

①
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] & \text{Banach} & Y \arrow[l] \\
\cup & & \cup \\
D(A) \arrow[rr, hook, two heads, "A"] & & \mathrm{Im}A
\end{tikzcd}$$

A: closed linear operator

则 $\mathrm{Im}A$ closed $\Longleftrightarrow \exists c > 0$ s.t. $\|Ax\| \geqslant c\|x\| \ (\forall x \in D(A))$

②
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] & \text{Banach} & Y \arrow[l] \\
\cup & & \cup \\
D(A) \arrow[rr, "A"] \arrow[d, "q"'] & & \mathrm{Im}A \\
D(A)/\mathrm{ker}A \arrow[urr, dashed, "\hat{A}"'] & &
\end{tikzcd}$$

A: closed linear operator

则 $\mathrm{Im}A$ closed $\Longleftrightarrow \exists c > 0$ s.t. $\|Ax\| \geqslant c\|[x]\|_{X/\mathrm{ker}A}$ $(\forall x \in D(A))$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "A"] & Y \\
\mathrm{Ker}A \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] & \mathrm{Im}A \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \\
X^* & Y^* \arrow[l, "A^*"'] \\
\mathrm{Im}A^* \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] & \mathrm{Ker}A^* \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"]
\end{tikzcd}$$

之前我们已经研究了 ImA 与 $\mathrm{Ker}A^*$ 之间互为零化子的关系. 接下来的定理给出 KerA 与 $\mathrm{Im}A^*$ 的关系

类似地, 在定理之前, 我们已知:

① $\mathrm{Ker}A \subset {}^{\circ}(\mathrm{Im}A^*)$

$\forall x \in \mathrm{Ker}A$, 对 $\forall x^* \in \mathrm{Im}A^*$ 有 $(x, x^*) = (x, A^*y^*) = (y^*, \underbrace{Ax}_{=0}) = 0$

$\therefore \mathrm{Ker}A \subset {}^{\circ}(\mathrm{Im}A^*)$

② $\mathrm{Im}A^* \subset (\mathrm{Ker}A)^{\circ}$

$\forall x^* \in \mathrm{Im}A^*$, 对 $\forall x \in \mathrm{Ker}A$ 有 $(x^*, x) = (A^*y, x) = (\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{Ax}, y^*) = 0$

$\therefore \mathrm{Im}A^* \subset (\mathrm{Ker}A)^{\circ}$

(本质也是由于 KerA 是闭的)

其中 ① 可以加强为等号: ①′: $\boxed{\mathrm{Ker}A = {}^{\circ}(\mathrm{Im}A^*)}$

验证: 对 $x \in {}^{\circ}(\mathrm{Im}A^*)$ 有:

$\forall x^* \in \mathrm{Im}A^* \quad (x^*, x) = 0$

而 $(x^*, x) = (A^*y^*, x) = (y^*, Ax) = 0$

norming functional 存在性的推

假设 $x \neq 0$ 则 $\exists y^* \in Y^*$ s.t. $y^*(x) = \|$ $\neq 0$ 矛盾

由 x^* 的任意性 $\Rightarrow$ y^* 有任意性 $\Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}A$

$\therefore \mathrm{Ker}A \supset {}^{\circ}(\mathrm{Im}A^*) \Rightarrow \mathrm{Ker}A = {}^{\circ}(\mathrm{Im}A^*)$

Theorem 3.16: X, Y Banach spaces $A: X \to Y$, then

$\mathrm{Im}A$ closed $\Rightarrow \mathrm{Im}A^* = (\mathrm{Ker}A)^{\circ} \Rightarrow \mathrm{Im}A^*$ closed (∵零化子是闭的)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "A"] & Y \arrow[r, "\text{Banach}" near end, phantom] & {} \\
\mathrm{Ker}A \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] & \mathrm{Im}A \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] & \\
X^* & Y^* \arrow[l, "A^*"'] & \\
\mathrm{Im}A^* \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] & &
\end{tikzcd}$$

Proof: 上面已经说明: $\mathrm{Im}A^* \subset (\mathrm{Ker}A)^{\circ}$, 故下面只用证明 $(\mathrm{Ker}A)^{\circ} \subset \mathrm{Im}A^*$ (也即任取 $x^* \in (\mathrm{Ker}A)^{\circ}$, 可以推出 $x^* \in \mathrm{Im}A^*$)

任取 $x^* \in (\mathrm{Ker}A)^{\circ}$, 要证 $x^* \in \mathrm{Im}A^*$, 只用证 $\exists y^* \in Y^*$ s.t. $A^*y^* = x^*$, 接下来要找这个 y^*

由伴随算子的定义: $y^*: Y \to \mathbb{R} \quad x^*: X \to \mathbb{R}$

$A^*y^* = x^*$ 实际上要求
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "x^*"'] & Y \arrow[r, "y^*"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$
即二者效果相同

当 $x \in X$, $Ax = y \in Y$ 时 应有 $x^*(x) = y^*(y) \in \mathbb{R}$

因此我们对要找的这个 y^* 的结构已有所了解

但由于 $Ax=y$ 将 y 限制在了 $\mathrm{Im}A$ 上，故先只能从 $\mathrm{Im}A$ 上找一个符合此结构的泛函再将其延拓到 Y 上成为 y^*. 因此有如下操作

构造一个 functional

$$\begin{aligned} f: \mathrm{Im}A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto x^*(x) \\ \overset{\Vert}{Ax} & \quad x\in X \end{aligned}$$

<u>claim</u>: f is a bounded linear functional

验证: ① 先看 f 是否良定义. 因可能存在多个 $x\in X$ s.t. $Ax=y$

假设 $Ax_1=Ax_2=y$ 则 $A(x_1-x_2)=0 \Rightarrow x_1-x_2\in \mathrm{Ker}A$

而 $x^*\in(\mathrm{Ker}A)^\circ$ $\therefore x^*(x_1-x_2)=0 \Rightarrow x^*(x_1)=x^*(x_2)$ ∴ 是良定义的

② 对 $y_1,y_2\in\mathrm{Im}A$. $f(\alpha y_1+\beta y_2)=f(\alpha Ax_1+\beta Ax_2)$

$=f(A(\alpha x_1+\beta x_2)) = x^*(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha x^*(x_1)+\beta x^*(x_2)=\alpha f(y_1)+\beta f(y_2)$

$\therefore f$ linear

③ 任取 $z\in\mathrm{Ker}A$ 则 $y=A(x-z)$ $f(y)=x^*(x-z)$

$\therefore |f(y)|=|x^*(x+z)|\le\|x^*\|\|x-z\|$ $\forall z\in\mathrm{Ker}A$

$\Rightarrow |f(y)|\le\|x^*\|\cdot\inf\limits_{z\in\mathrm{Ker}A}\|x-z\|=\|x^*\|\|[x]\|_{X/\mathrm{Ker}A}$

由 Theorem 3.14: $\boxed{A \text{ closed}} \Rightarrow \exists C>0$ s.t. $\|Ax\|\ge C\|[x]\|_{X/\mathrm{Ker}A}$

$\therefore |f(y)|\le\|x^*\|\|[x]\|_{X/\mathrm{Ker}A}\le\frac{1}{C}\|x^*\|\|Ax\|=\underbrace{\frac{1}{C}\|x^*\|}_{M}\|y\|$

$\therefore f$ is bounded

∴ 由 Hahn-Banach extension theorem 的推论，f 可以延拓到全空间 Y 上

$\therefore \exists y^*\in Y^*$ s.t. $y^*(y)=f(y)$ $\forall y\in\mathrm{Im}A$

又 $y=Ax$ $x\in X$

$\therefore x^*(x)=f(y)=(y^*,y)=(y^*,Ax)=(A^*y^*,x)=A^*y^*(x)$ $\forall x\in X$

从而 $x^*=A^*y^*$ 即 $x^*\in\mathrm{Im}A^*$ 故 $(\mathrm{Ker}A)^\circ\subset\mathrm{Im}A^*$

$\therefore (\mathrm{Ker}A)^\circ=\mathrm{Im}A^*$ 又零化子均闭 $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}A^*$ is closed.

#

The uniform boundedness principle (共鸣定理)
(or the Banach-Steinhaus Theorem)

Theorem 3.17: Let X be a Banach space, Y be a normed space. Let W be any subset of $B(X,Y)$ s.t. $\forall x\in X$, $\sup\limits_{A\in W}\|Ax\|<$

Then $\sup\limits_{A\in W}\|A\|<+\infty$ (i.e. $\exists M>0$ s.t. $\|A\|\le M$ 对 $\forall A\in W$ 成立)

Proof:

$$\begin{tikzcd}\overset{\text{Banach}}{X} \arrow[r, bend left, "W"] \arrow[r] \arrow[r, bend right] & \overset{\text{normed}}{Y}\end{tikzcd}$$

记 $V_n=\{x\in X \mid \sup\limits_{A\in W}\|Ax\|\le n\}$

则 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}V_n$

claim: V_n is closed 从而 $\overline{V_n}=V_n$

验证: 取 $\{x_k\}\subset V_n$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$

A bounded $\Rightarrow$ A continous $\therefore \lim\limits_{k\to\infty}Ax_k=Ax$

$\Rightarrow \|Ax\|=\lim\limits_{k\to\infty}\|Ax_k\|\le n \quad \forall A\in W$

$\therefore \sup\limits_{A\in W}\|Ax\|\le n \Rightarrow x\in V_n$

X Banach space $\Rightarrow$ X is of 2^{nd} category

$\therefore \exists n_0$ 和 $B(x_0,r)$ s.t. $B(x_0,r)\subset\overline{V_{n_0}}=V_{n_0}$

对 $\forall z\in B(0,r)$ 有 $x_0+z\in B(x_0,r)\subset V_{n_0}$ 又 $x_0\in B(x_0,r)\subset V_{n_0}$

$\therefore \begin{cases}\|A(x_0+z)\|\le n_0\\ \|Ax_0\|\le n_0\end{cases}$ 对 $\forall A\in W$

$\Rightarrow \|Az\|=\|A(x_0+z)-Ax_0\|\le\|A(x_0+z)\|+\|Ax_0\|\le 2n_0$ 对 $\forall A\in W$ (*)

取 $\forall x\in X$. 则 $\frac{x}{2\|x\|}\cdot r\in B(0,r)$

由(*): $\|A(\frac{x}{2\|x\|}r)\|\le 2n_0 \Rightarrow \|Ax\|\le\frac{4n_0}{r}\|x\|$ $(\forall A\in W)$

从而 $\sup\limits_{A\in W}\|A\|<+\infty$

#

Remark: 若将上述定理中的Y用其完备化$\overline{Y}$（Banach space）替代

则可以给出另一种漂亮的证明:

Proof: 记 $W=\{A_i \mid i\in I\}$ I:指标集 $W\subset B(X,\overline{Y})$

$l_\infty(I;\overline{Y}) := \{(y_i)_{i\in I} \mid y_i\in\overline{Y}$ 且 $\sup_i \|y_i\| < +\infty\}$ $\left(\|(y_i)_{i\in I}\| := \sup_i \|y_i\|\right)$

构造:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] & l_\infty(I;\overline{Y}) \\ x \arrow[r, mapsto] & (A_i x)_{i\in I} = Tx \end{tikzcd}$$

claim1: $l_\infty(I;\overline{Y})$ is Banach space.

证: 范数的定义显然是OK的. 故只需证完备性.

取 $\{(y_i^{(n)})_{i\in I}\}\subset l_\infty(I;\overline{Y})$ Cauchy seq.

则 $\|y_i^{(n)}-y_i^{(m)}\| \le \|(y_i^{(n)})_{i\in I}-(y_i^{(m)})_{i\in I}\| = \sup_i \|y_i^{(n)}-y_i^{(m)}\| \to 0 \ (n,m\to+\infty)$ $\forall i\in I$

$\therefore \{y_i^{(n)}\}\subset\overline{Y}$ $(\forall i\in I)$ 是$\overline{Y}$中的 Cauchy seq. 因此有极限.

记 $\lim_{n\to\infty} y_i^{(n)} = \tilde{y}_i$ $(\forall i\in I)$ $\tilde{y}_i\in\overline{Y} \Rightarrow (\tilde{y}_i)_{i\in I}\in l_\infty(I;\overline{Y})$

则 $\|(y_i^{(n)})_{i\in I}-(\tilde{y}_i)_{i\in I}\| = \sup_i \|y_i^{(n)}-\tilde{y}_i\| \to 0 \ (n\to\infty)$

$\therefore \{(y_i^{(n)})_{i\in I}\}$ 在 $l_\infty(I;\overline{Y})$ 中有极限 $(\tilde{y}_i)_{i\in I}$ $\therefore$ 完备

claim2: T closed

证: 取 $\{x_n\}\subset X$ s.t. ① $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (in X) & ② $\lim_{n\to\infty} A_i x_n = y_i$ (in $l_\infty(I;\overline{Y})$)

$\because A_i$ bounded $(\forall i\in I) \Rightarrow A_i$ continous $(\forall i\in I)$

$\therefore$ 由① $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_i x_n = A_i x$ 结合② $\Rightarrow y_i = A_i x$

$\therefore T$ closed

则 X, $l_\infty(I;\overline{Y})$ are Banach spaces T is closed

$\xRightarrow{CGT}$ T is bounded

而 $$\|T\| = \sup_{\substack{\|x\|<1\\ x\in X}} \|(A_i x)_{i\in I}\| = \sup_{\substack{\|x\|<1\\ x\in X}} \sup_{i\in I} \|A_i x\| = \sup_{i\in I} \sup_{\substack{\|x\|<1\\ x\in X}} \|A_i x\|$$

$$= \sup_{i\in I} \|A_i\|$$

$\therefore \|T\| < +\infty \Longleftrightarrow \sup_{i\in I} \|A_i\| < +\infty$ 即证得结论

#