纪念欧拉诞辰300周年特刊

珞珈数学

2007.5
总第14期

主办：武汉大学数学与统计学院

承办：数学与统计学院基地班联谊会

纪念数学家欧拉的纸币和邮票

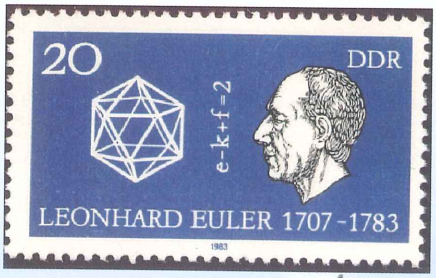
READ EULER, READ EULER, HE IS THE MASTER OF US ALL.
P.-S.DE LAPLACE

民主德国于1950年发行：纪念柏林科学院成立250周年一套邮票中的一枚

瑞士曾经以欧拉的肖像为十瑞士法郎纸币上的图案

瑞士于1957年发行：纪念欧拉的250周年诞辰

瑞士于2007年发行：纪念欧拉诞辰300周年



德国于1983年发行：纪念欧拉的200周年忌辰

苏联于1957年发行：纪念欧拉的250周年诞辰

德国于1957年发行：这是"Famous Scientists"系列票中纪念欧拉的一幅

卷首语

为欧拉辩护（译诗）

——对E．T．贝尔将阿基米德、牛顿和高斯列为有史以来最顶尖的三位大数学家一事［①］的回应

作者：Bill Dunham、Charlie Marion

在我们让你离开之前，你的选择已坚如磐石。考虑到我们骨鲠在喉，贝尔，请慎重地宣布那荣衔。

且莫紧张，缓下结论，请先倾听我们的心声。或许让你心烦，或许庸人自扰，我们将帮你把选择完善一新。

年迈的阿基米德，还有牛顿与高斯，尽管他们理应跻身至尊三清在数学那荣耀的殿堂里，不妨为另一位大师留出一席。

没有了巴塞尔的吟游诗人，贝尔，你无疑已经忙中出错。我们的投票全为了欧拉的名份，他的歌唱已倾诉了一切理由。

鸿篇巨制[②]——哉伟业，渊博与深奥贯穿始终。欧拉是否能与精英为侣？毋庸置疑，尽在情理之中。

想想他如何依次的求和，自然数平方的倒数作为通项，多么艰深的计算——你将晓得，他算出了六分之π的平方。

我们因未见其名而万分惊诧，欧拉竟没和你册封的圣者同伍。 在你的名人殿堂里没有了他，你的判断不成了丹纳式翻晒？[③]

是时候了——将荣誉归还你所遗漏的人，这样才能使你的职责更佳。将杰出的欧拉加进你的名单，敲响大钟[④]挽回他的声誉。

注：[①]贝尔的原话是："阿基米德、牛顿和高斯他们三人在伟大数学家当中单独构成一个档次。"《大数学家》中译本，台湾九章出版社，1998年，221页。诗人在这里为欧拉未能与他们并列抱不平。[②]直译为"七十二卷"，贝尔原书称"据估计，要出版已经搜集到的欧拉著作，将需要大4开本60至80卷。"[③]丹纳是法国史学家兼文艺批评家，有人批评他只采用有利于他理论的材料，抛弃一切抵触的材料，主观倾向严重。[④]这里是双关语，Bell在英文中意为"钟"。

今天我以基地班为荣，
明天基地班为我骄傲！

刊名题词：路见可
名誉顾问：陈　化　尹常倬
指导老师：吴蜀江　黄安云
　　　　　李　好　周　宁
主　　编：魏　博
副 主 编：郑　燕
编　　委：朱　杰　张　驰
　　　　　张　敏　蔡　力
　　　　　莫兴波　梅昱菡
　　　　　席　栋　谢　玲
　　　　　宋　娜　谢大军
　　　　　吴　迪　冯　薇
封面设计：魏　博
排　　版：张　璐
主　　办：武汉大学数学与统计学院
承　　办：数学基地班联谊会
承　　印：武汉新新彩印制版有限责任公司
电　　话：027-82437110
　　　　　027-82437015

虽然不允许我们看透自然界本质的秘密，从而认识现象的真正原因，但仍可能发生这样的情形：一定的虚构假设足以解释许多现象。数学这门科学，需要观察，还需要实验。

——欧拉

几何辨，王者之道。

——欧几里德

目　录

虽然不允许我们看透自然界本质的秘密，从而认识现象的真实原因，但仍可能发生这样的情形：一定的虚构假设足以解释许多现象。

因为宇宙的结构是最完善的而且是最明智的上帝的创造，因此，如果在宇宙里没有某种极大的或极小的法则，那就根本不会发生任何事情。

————欧拉

欧拉（Leonhard Euler 1707～1783）

欧拉，瑞士数学家，英国皇家学会会员。

欧拉从小着迷数学，是一位不折不扣的数学天才。他13岁便成为著名的巴塞尔大学的学生，16岁获硕士学位，23岁就晋升为教授。1727年，他应邀去俄国圣彼得堡科学院工作。过度的劳累，致使他双目失明。但是，这并没有影响他的工作 。欧拉具有惊人的记忆力。据说，1771年圣彼德堡的一场大火，把他的大量藏书和手稿化为灰烬。他就凭着惊人的记忆，口授发表了论文400多篇、论著多部。欧拉这位18世纪数学巨星，在微积分、微分方程、几何、数论、变分学等领域都作出了巨大贡献，从而确定了他作为变分法的奠基人、复变函数先驱者的地位。同时，他还是一位出色的科普作家，他发表的科普读物，在长达90年内不断重印。欧拉是古往今来最多产的数学家，据说他留下的宝贵的文化遗产够当时的圣彼得堡所有的印刷机同时忙上几年。

欧拉作为历史上对数学贡献最大的四位数学家之一（另外三位是阿基米德、牛顿、高斯），被誉为“数学界的莎士比亚”。

他停止了生命和计算

——纪念大数学家欧拉诞辰300周年

蔡天新

如果说17世纪是牛顿的世纪，那么18世纪就属于欧拉。彼得大帝和叶卡捷琳娜的俄罗斯，不仅开始了赞助艺术的传统，也从异国聘请了欧拉和贝努利兄弟那样的科学天才。不少数学史家把欧拉与阿基米德、牛顿和高斯并列为有史以来最伟大的四位数学家。

在人类文明史上，不乏失明的歌唱者，从古代希腊的荷马到中世纪波斯的鲁达基，从近代英国的弥尔顿到上世纪阿根廷的博尔赫斯。可是，在科学家中这类人物极为罕见。如同创作不朽旋律的贝多芬双耳先后失聪一样，从事数学研究的欧拉也在晚年双目失明，但这丝毫不减少他们的创造力。

小国里的数学巨匠

在一个小国家里诞生一位科学巨匠，这在世界史上并不多见。瑞士数学家、物理学家莱昂纳尔·欧拉便是其中最出色的一位，虽然他成年以后一直生活在两座遥远的异国城市：彼得堡和柏林，他的肖像画却出现在瑞士法郎上，与英镑上的牛顿一起成为至今仍流通欧洲的纸币上仅有的两位科学家。1707年4月15日，欧拉出生在瑞士西北部邻近法国和德国的巴塞尔，这座通用法语的城市至今人口仍不足20万，却拥有瑞士最早的学府———巴塞尔大学(1460)，莱茵河蜿蜒着穿过她的中心。德国哲学家尼采年轻时曾在巴塞尔大学担任过十年的古典文献学教授，在那里完成了他的代表作《悲剧的诞生》，并与在近郊安度晚年的音乐家瓦格纳成为莫逆之交。

让我们先把时光推进到欧拉20岁那年，即1727年。对欧拉来说这是一个关键性的年份，那一年牛顿在伦敦去世，那一年欧拉开始了学术生涯，他首次参加了巴黎科学院的有奖竞赛———在船上安置桅杆。这一传统的竞赛活动起始于1721年，吸引并激励了欧洲各国难以计数的年轻人，它对科学的贡献超过了诺贝尔奖的设立。不幸而又幸运的是，欧拉落选了，加上此后求职母校未果，当年他便动身去了俄国，受聘于彼得堡科学院。可是，就在欧拉踏上俄罗斯领土的那一天(5月17日)，这个国家的女皇叶卡捷琳娜一世去世了。作为俄国最伟大的君王———彼得大帝的情妇和妻子，这位出身卑微的立陶宛女子在许多方面都表现得非常开明，在她仅仅两年多的在位时间里，实现了丈夫建立科学院的愿望。

牧师家庭出身的欧拉之所以选择后来的科学道路，不能不说是与当地一个叫贝努利的数学世家有关。贝努利家族原先居住在比利时的港口城市安特卫普(当时隶属荷兰)，因为遭受宗教迫害而于16世纪末逃难到内陆的法兰克福，尔后又迁至瑞士，在巴塞尔安顿下来。这个家族的三代人中出现了八位极有成就的数学

家，其中最年长的一位雅各布在巴塞尔大学做了数学教授，并成为欧拉父亲的老师。尽管老欧拉颇具数学才华，却差点犯下一个错误，在教会儿子数学的同时又要求他继承自己乡村牧师的职位。事实上，在那个年代里对非显贵家庭出身的西方年轻人来说，牧师、医生和律师不失为安身立命的三个好职业。

于是小欧拉进了巴塞尔大学学习神学和希伯来语，但他的数学才能很快引起了雅各布的弟弟约翰的注意，约翰在雅各布去世后继承了兄长的职位，他的两个儿子尼古拉和丹尼尔也与欧拉结为挚友(兄弟俩均为数学家)。17岁那年，欧拉获得哲学硕士学位，同时也面临对未来职业的抉择，老欧拉仍固执己见，幸亏诸位贝努利前辈的热情劝告和担保，做父亲的才最后放弃自己的主张，数学王国里才不至于失去这样一位伟大的创造者。尼古拉和丹尼尔后来应聘到新成立的彼得堡科学院，正是在他们兄弟的举荐之下，欧拉告别了父老乡亲，从此踏上了不归的数学之路。虽然欧拉没有做成牧师，但父亲笃信的加尔文教赋予了他一颗温厚、仁慈之心，他毕生为人都十分谦逊。

欧拉被公认为是纯粹数学的奠基人之一，也是历史上最卓越、最多产的科学家之一，被同代数学家视为“分析的化身”，此外他在数论、几何学、拓扑学、力学诸方面均有重大的原创性贡献，并把成果广泛应用到物理学和工程技术领域。在我看来，欧拉的一个无与伦比的优点在于他的精细和耐心，这使得以他名字命名的数学发现无处不在，并且总是处在各个领域令人瞩目的位置。例如，欧拉函数和欧拉定理（数论)、欧拉常数（微积分)、欧拉公式(复变函数)、欧拉线和欧拉圆（几何学)、欧拉图（图论)、欧拉示性数（拓扑学)、欧拉角（动力学)、欧拉方程式（流体力学）等等。

与女皇和国王相处

正如拿破仑是结交数学家最多的君王，与君王打交道最多的数学家是欧拉。直到18世纪，欧洲的大学依然不是主要的学术研究中心，不过比起物理学等近代科学分支来，数学因为与古典传统较为接近而受到重视。可是，尽管微积分学诞生已经一个世纪，但大学教授的主要精力仍在对付初等数学，他们很少花精力做前沿研究。与17世纪法国那些伟大的业余爱好者不同，真正的学者有了自己的靠山和赞助人，那便是专业的科学研究机构。由于莱布尼兹的大力倡导，在有远见的统治者的支持下，柏林科学院和彼得堡科学院相继成立，加上此前成立的意大利（山猫）科学院、英国皇家学会和法国皇家科学院(梅森学院)，数学史上最活跃的时期已经来临。

可是，欧拉初到彼得堡的日子，处境十分艰难。叶卡捷琳娜一世死后，权力旁落到一伙粗鲁残暴的家伙手里，甚至年幼的沙皇也在能够行使自己的职权以前死去。那些当权者把科学院及其研究者看成是可有可无的摆设，他们甚至考虑取消它，遣返所有的外籍人员。也算是不幸中的大幸，贝努利兄弟原先推荐欧拉去的是医学部，因为只有那儿有空缺，为此他突击学习了生理学并在巴塞尔大学旁听了医学讲座，科学院混乱的管理正好给了欧拉机会，他偷偷溜进了数学部。那以后的六年时间里，欧拉埋头于自己的研究，完全沉浸在数学王国，

直到他的引路人之一丹尼尔·贝努利（尼古拉·贝努利在欧拉抵达前一年溺水身亡）决定离开俄国，返回自己的祖国。

在丹尼尔回到瑞士以后，欧拉接替了他在彼得堡科学院的数学教授职位，那年欧拉26岁，准备在俄罗斯安家了，新娘是彼得大帝西游时带回来的画师的女儿，也是欧拉的瑞士同胞。那时俄国早有了一位新女皇，即彼得大帝的侄女安娜·伊万诺夫娜，虽说在安娜的情夫的间接统治下俄罗斯经受了历史上最血腥的恐怖时期，但科学院的境况并没有变得更糟，欧拉这样的数学家对当权者无害。欧拉喜欢孩子，他的两任妻子（第二个妻子是第一个妻子的同父异母的妹妹）先后生下了13个孩子，欧拉常常一边抱着婴儿一边写论文，稍长的孩子们则围绕着父亲嬉戏，他是在任何地方、任何条件下都能工作的少数几位大科学家之一。

1740年，安娜女皇退位并于当年去世，欧拉遂接受了普鲁士国王腓特列大帝的邀请，到柏林科学院担任数学部主任。传说王太后很喜欢老实持重的欧拉，有一次她故意逗他说话，但是欧拉的回答总是很简洁，“是”或者“不是”。“为什么你不愿意跟我多说话呢？”太后问。“太后，我刚从那样一个国家来，在那里你要是说多话，就会被吊死。”相比之下，欧拉与普鲁士国王相处并不愉快，因为国王喜欢溜须拍马的大臣。他之所以支持数学只是感到那是一种责任，但他从内心里讨厌这门学问，因为他自己的数学很蹩脚，这方面他无法与法兰西皇帝拿破仑相比，后者自称是个几何学家，并与同时代所有的巴黎数学家都交上了朋友。

在很多时候，欧拉代理彼得堡科学院院长的职务，他在柏林不受欢迎的另一个原因是，他对腓特列大帝津津乐道的哲学问题一无所知。有一次，法国启蒙主义思想家伏尔泰来访，在竭尽所能取悦了一番国王之后，他又以一套近乎玄学的语汇拿欧拉逗乐。忠厚老实的欧拉耐着性子接受了这一切，但国王却感觉自己丢了面子，他决心物色一位能说会道的数学家来领导他的科学院，结果法国人达朗贝尔被邀请到了柏林。比欧拉年轻10岁的达朗贝尔是偏微分方程的开拓者，他最早写出了动力学原理的著作，此外，他又是著名的《百科全书，或科学、艺术和工艺详解词典》的副主编（主编是哲学家狄德罗）。

这是世界上第一部影响巨大的百科全书，网罗了一大批启蒙主义思想家，并在编撰过程形成了一个被后人称之为“百科全书”的哲学流派。显而易见，这样一位全才的人物足以让腓特列大帝的虚荣心得到满足，没想到的是，达朗贝尔却是一位头脑清醒、判断力精确的人，虽然他和欧拉在学术上有过一些不快。这位法国客人十分坦率地告诉普鲁士国王，把任何其他数学家置于欧拉之上都是一种错误的行为。可惜的是，这不仅没有让自负的国王改变对欧拉的看法，反而变本加厉使得欧拉更难以忍受。为了自己子女的前途，欧拉只好打点行装，离开了生活了25年之久的柏林，再次回到了寒冷的彼得堡，他的妻子和儿孙们也一同返回。

此时俄罗斯又有了一位新女皇，即叶卡捷琳娜二世，她本是德意志亲王的女儿，因为嫁给彼得大帝的外孙来到俄国，有机会接近并攫取王位。叶卡捷琳娜二世在位的34年里，继承了彼得大帝未竟的事业，领导俄国全面参与

欧洲的政治和文化生活，制定法典并厉行改革，同时夺取了波兰和克里米亚的大部分领土，故又被称作叶卡捷琳娜大帝。在欧拉回到彼得堡之后，女皇以皇室的规格接待他，拨给他一栋可供全家18人居住的大房子和成套的家具，并派去自己的一个厨子。恼羞成怒的普鲁士国王只得写信给法国数学家拉格朗日，“欧洲最伟大的国王希望欧洲最伟大的数学家在他的宫里。”显而易见，他对欧拉的离任耿耿于怀。

孜孜不倦的失明者

在人类文明史上，不乏失明的歌唱者，从古代希腊的荷马到中世纪波斯的鲁达基，从近代英国的弥尔顿到上世纪阿根廷的博尔赫斯。可是，在科学家中这类人物极为罕见。如同创作不朽旋律的贝多芬双耳先后失聪一样，从事数学研究的欧拉也在晚年双目失明，但这丝毫不减少他们的创造力。贝多芬一生写作了九部交响曲、五部钢琴协奏曲、十部钢琴和小提琴协奏曲，还有难以计数的钢琴奏鸣曲、弦乐四重奏、声乐和歌剧作品。而欧拉完成了800多篇（部）论文和著作，其中58%是数学方面的，物理学－力学和天文学各占了28%和11%，其余3%是关于航海学和建筑学的。从1907年欧拉诞辰200周年开始，瑞士政府着令有关部门编辑《欧拉全集》，那是72卷大四开本的巨著，至今尚未完成。

必须指出的是，欧拉的失明并非由于家族的遗传。第一次灾难降临时欧拉只有28岁，为了赢得一项天文学的巴黎大奖，他连续工作了三天三夜，把这个难题给解决了，而当时其他几位主要数学家都认为那需要数个月的时间。结果引发了一场疾病，欧拉从此失去了右眼的视力，这一点我们从他本人留下来的几幅肖像画中也可以看出。欧拉的左眼患上白内障是在他第二次居留俄国期间，那时他快60岁了。虽然欧拉的通信者如法国数学家拉格朗日、达朗贝尔等表示了深深的忧虑，他本人倒是能够泰然处之。在完全失明之前，他努力尝试用粉笔把公式写在大石板上，然后让儿子或秘书抄下来，他自己再口述对公式的说明和其他文字。这样一来，他写作论文的效率非但未有降低，反而提高了。

与许多失明者一样，欧拉有着非凡的记忆力。除了几乎把那个时代的全部数学结果铭记于心以外，他还长于心算。更让人不可思议的是，欧拉能背出古罗马大诗人维吉尔的12卷史诗《埃涅阿斯纪》每一页的首句和末句。这部史诗描述了特洛伊沦陷以后王子埃涅阿斯历尽艰辛，在异国他乡（罗马）重新建立居留地的故事，其优美智慧的诗句、结构和韵律达到了尽善尽美的地步，以至于但丁在《神曲》里让维吉尔引领他到达了天堂。或许，欧拉从中获得了某种共鸣，他的数学发明总是以优美的形式出现。晚年当被友人问起在哪个地方度过的时光最美好时，他不假思索地回答说是彼得堡。在欧拉完全失明的17年间，最让他得意的工作是发现月球的运动规律，那曾是惟一使牛顿头痛的问题，被欧拉通过复杂的分析和心算推导出来了。

除了失明以外，欧拉一生还遭遇了许多不幸，8个孩子先后夭折，晚年的一场大火几乎夺走了他的生命和手稿，幸亏瑞士仆人的奋

力抢救，但他的房子连同藏书全被烧毁了。叶卡捷琳娜二世获悉后马上补偿了全部经济损失，欧拉重又投入了工作。值得一提的是，在安娜和叶卡捷琳娜二世之间，俄国还有一位女皇伊丽莎白，那便是彼得大帝的女儿。她在位的20年间，欧拉一直生活在柏林，尽管如此，俄国方面照付给他院士津贴。也是在她在位期间，彼得堡科学院第一次有了本国院士——科学家兼诗人罗蒙诺索夫。有一年，俄罗斯军队入侵柏林远郊，欧拉的农场遭到了抢劫，女皇知道后加倍赔偿了他的损失。可以说，欧拉的一生得到了俄国四位女皇的垂青。

飞驰的船停住了

1783年9月18日，一个晴朗的秋日下午，欧拉像往常一样在石板上写着什么，那可能是在计算气球上升的轨迹。然后，他和家人一起吃晚饭，谈论着新近发现的天王星。那会儿，在德国中北部的不伦瑞克，一座离开柏林不到200公里的小城里，园丁的儿子高斯已年满6岁，充分显露出了数学神童的天赋。晚餐后，欧拉一边喝着茶，一边和小孙女玩耍，突然之间，烟斗从他手中掉了下来。他说了一句："我死了"，随即"欧拉停止了生命和计算"。后面这句经常被数学史家引用的话出自法国哲学家兼数学家孔多塞之口，他是大革命时期的急先锋，后来不幸死于狱中。不知为何，这句话使我联想起欧拉喜爱的维吉尔的诗句，"锚抛下去，飞驰的船停住了。"

每个人都有时代的局限性，在欧拉研究过的诸多难题中，有的尚未完全解决，例如天文学中的三体问题，即太阳、地球和月亮在相互引力下如何运动的问题，这个问题至今仍然存在。由于欧拉涉足的研究范围十分广泛，即使在他为之倾心的数学领域，仍有许多未解决的问题，例如毕达哥拉斯时代遗留下来的完美数和友好数问题，这方面以欧拉的贡献最大；再如费尔马大定理，欧拉也有出色的贡献，但最终的解答由英国数学家怀尔斯在上个世纪末给出；又如哥德巴赫猜想，是欧拉和数学家哥德巴赫通信时提出来的，至今未有证实或否定。哥德巴赫的故乡在普鲁士的哥尼斯堡，诞生于这座城市的"七桥问题"是拓扑学的出发点，而把这个世俗问题抽象到数学高度的正是欧拉。

确切地说，欧拉是历史上最著名的宫廷数学家，他毕生往返于两个敌对的国度——俄罗斯和德意志之间，侍奉于不同的国王和皇后。一次，腓特烈大帝命令欧拉给他的侄女授课，他便动笔写下了一系列文笔优美的散文，后来变成畅销数十个国家的《给一位德国公主的信》，这是出自科学家手笔的科普著作的早期范本。尽管如此，由于欧拉既不像前辈牛顿那样建立起一门新科学（微积分学）和完整的力学体系，也不像后来的高斯那样建立起一个数学学派（哥廷根学派），加上他来自小国家，他的公众知名度并不特别高。有许多时候，欧拉以一种谦逊之心默默做着别的大数学家不愿意做的工作，如同欧拉早年的导师约翰 · 贝努利给他信中所写的："我在教高等分析的时候，他还是个孩子，而您正在将他带大成人。"

谈到18世纪的数学家，尽管法国人更愿意抬高自己的同胞拉格朗日，欧拉仍被更多的同行推崇为最有成就的一位。还有不少数学史

欧拉发现的众多定理基本分散在他的论文中，这里仅收集了极少数，大家若有兴趣可以找到更多。

部分欧拉的定理

2004 级数学基地班

分 析：

首先是著名的

$$e^{iv}=\cos(v)+\sin(v)$$

$$(\cos(z)+i\sin(z))^{n}=\cos(nz)+i\sin(nz)$$

关于后面一个公式，Abraham de Moiré 在 1707~1730 年间曾逐步获得了相当于这个公式的结果，但他仅隐含的写出这一公式。欧拉首次明确的陈述了这一公式并将 n 推广至任意实数。欧拉扩展了微积分的领域，并为分析学的一些重要分支（如无穷级数、微分方程等）的产生与发展奠定了基础。欧拉把无穷级数由一般的运算工具转变为一个重要的研究科目。他计算出 ξ 函数在偶数点的值。他证明了 是有理数，而且可以用伯努利数来表示。

此外，他对调和级数亦有所研究，

$$Y(n)=\ln(n)+g$$

并相当精确的计算出欧拉常数 γ 的值，其值近似为 0.577215664901532860606512 09...

家把欧拉与阿基米德、牛顿和高斯并列为有史以来最伟大的四位数学家。他们拥有一个共同点，即在创建纯粹理论的同时，还把自己发明的数学工具用以解决大量天文、物理和力学问题。他们不断地从实践中吸取营养，同时又绝不满足于解决具体问题；他们把宇宙看成是一个有机的整体，力图揭示出它的内在奥秘和规律。有着“法兰西的牛顿”之誉的拉普拉斯赞叹道，“学习欧拉吧，他是我们所有人的老师”；“数学王子”高斯也曾经说过，“对于欧拉工作的研究，将仍旧是数学人能上的最好的无可替代的学校。”从某种意义上讲，自从欧拉去世以后，数学再也不像从前那样美好了。

（蔡天新 摘自《南方周末》）

在 18 世纪中叶，欧拉和其他数学家在解决物理方面的问过程中，创立了微分方程学。当中，在常微分方程方面，他完整地解决了 n 阶常系数线性齐次方程的问题，对於非齐次方程，他提出了一种降低方程阶的解法；而在偏微分方程方面，欧拉将二维物体振动的问题，归结出了一、二、三维波动方程的解法。欧拉所写的《方程的积分法研究》更是偏微分方程在纯数学研究中的第一篇论文。他引入了 G 函数和 B 函数，这证明了椭圆积分的加法定理，以及最早引入二重积分等等。

代 数：

欧拉是近代数论的开拓者。他从费马的工作中曾汲取过许多数论研究的灵感，并获得了一系列深入的结果。他在 1770 年发表的《代数指南》，实际上是 18 世纪最重要的代数著作，里面有例如 n=3,4 的费马大定理的证明等。欧拉还给出了费马小定理的三个证明，并引入了数论中重要的欧拉函数 φ (n)。

二次剩余的互反定律，即二次互反律，首先是由欧拉发现的（虽然是特殊情形），虽然他本人没能给出证明，但二次互反律的研究成为 19 世纪重要的课题而且有很多“伟大的结果”。

欧拉首次将分析方法引入数论研究,发现了 ξ 函数所满足的函数方程，并引入欧拉乘积。他在 1737 年导出恒等式

$$\underset{n}{S}\frac{1}{n^s}=\underset{p}{P}\frac{1}{1-p^s}$$

其中 n 取遍所有整数，p 取遍所有素数，在数论和分析中间架起了桥梁

几 何：

欧拉线（同一三角形的垂心、重心、外心三点共线，这条直线称为三角形的欧拉线；且外心与垂心的距离等于垂心与重心距离的一半），

拓扑学的起源和欧拉有着深刻的联系，高中时代著名的关于凸多面体的欧拉公式：

设 v 为顶点数，e 为棱数，f 是面数，则 v-e+f=2-2p，p 为欧拉示性数，例如：p=0 的多面体叫第零类多面体；p=1 的多面体叫第一类多面体。

在微分几何方面，欧拉引入了空间曲线的参数方程，给出了空间曲线曲率半径的解析表达方式。在 1766 年，他出版了《关於曲面上曲线的研究》，这是欧拉对微分几何最重要的贡献，更是微分几何发展史上一个里程碑。他将曲面表示为 z=f(x,y)，并引入一系列标准符号以表示 z 对 x，y 的偏导数，这些符号至今仍通用。此外，在该着作中，他亦得到了曲面在任意截面上截线的曲率公式

$$k_n = k_1 \cos\left(a\right)^2 + k_2 \sin\left(a\right)^2$$

立体几何的欧拉变换［Euler’ s transformation］

考虑空间直角坐标轴 O－XYZ 与 O—X’ Y’ Z’，设 XY 平面和 X’ Y’ 平面的交线是 OX1，并设

∠XOX1 ＝ ϕ，

∠X’ OX1= ψ

∠ZOZ’ ＝ θ

则对同一点 P，在坐标系 O-XYZ 的

坐标是（x,y,z），在坐标系 O－X’ Y’ Z’ 的坐标是（x’ y’ z’），它们之间有如下关

系：

$$X = X'\left(\cos\phi \cos\psi - \sin\psi \cos\theta - Y'\left(\cos\phi \sin\psi + \sin\phi \cos\psi \cos\theta\right) + Z'\sin\phi \sin\theta\right)$$

$$Y = X'\left(\sin\phi \cos\psi + \cos\phi \sin\psi \cos\theta\right) - Y'\left(\sin\phi \cos\psi - \cos\phi \cos\psi \cos\theta\right) - Z'\cos\phi \sin\theta$$

$$Z = X'\sin\psi \sin\theta + Y'\cos\psi \sin\theta + Z'\cos\theta$$

这个变换称为欧拉变换。ϕ、ψ、θ 称为欧拉角．处理力学中刚体运动时，用这个变换很方便。

另外他解决了哥尼斯堡七桥问题，被看作拓扑学和图论的先声。

欧拉在各个领域的贡献

魏博

数学

欧拉是18世纪数学界的中心人物。他是继I．牛顿(Newton)之后最重要的数学家之一。在欧拉的工作中，数学紧密地和其他科学的应用、各种技术问题的应用以及公众的生活联系在一起。他常常直接为解决力学、天文学、物理学、航海学、地理学、大地测量学、流体力学、弹道学、保险业和人口统计学等问题提供数学方法．欧拉的这种面向实际的研究风格，使得人们常说：应用是欧拉研究数学的原因。其实，欧拉对数学及其应用都十分爱好。作为一位数学家，欧拉把数学用到整个物理领域中去。他总是首先试图用数学形式表示物理问题，为解决物理问题而提出一种数学思想并系统地发展和推广这一思想。因此，欧拉在这个领域中的杰出成就作为一个整体，可以用数学语言加以系统的阐述。他酷爱抽象的数学问题，非常着迷于数论就是例子。欧拉的数学著作在其各种科学著作中所占的比重也明显地说明了这一点。现代版的《欧拉全集》(Leonhardi Euleri Opera omnia，1911—) 72卷中有29卷属于纯粹数学。

欧拉在连续和离散数学这两方面都同样有力，这是他的多方面天才的最显著的特点之一。但是，在他的数学研究中，首推第一的是分析学。这同他所处的时代，特别是当时自然科学对分析学的迫切需要有关．欧拉把由伯努利家族继承下来的莱布尼茨学派的分析学的内容进行整理，为19世纪数学的发展打下了基础。他还把微分积分法在形式上进一步发展到复数的范围，并对偏微分方程、椭圆函数论、变分法的创立和发展留下先驱的业绩。在《欧拉全集》中，有17卷属于分析学领域。他被同时代

的人誉为“分析的化身”。

欧拉的计算能力，特别是他的形式计算和形式变换的高超技巧，无与伦比．他始终不渝地探求既能简明应用于计算，又能保证计算结果足够准确的算法。只是在19世纪开始的“注意严密性”方面，略显不足。他没有适当地注意包含无限过程的公式的收敛性和数学存在性。欧拉还是许多新的重要概念和方法的创造者。

这些概念和方法的重要价值，有时只是在他去世一个世纪甚至更长的时间以后才被人们彻底理解。譬如，美籍华人数学家陈省身说过：“欧拉示性数是整体不变量的一个源泉。”

欧拉是在数学研究中善于用归纳法的大师。他用归纳法，也就是说，他凭观察、大胆猜测和巧妙证明得出了许多重要的发现。但他告诫人们：“我们不要轻易地把观察所发现的和仅以归纳为旁证的关于数的那样一些性质信以为真。”欧拉从不用不完全的归纳来最后证明他提出的假定是正确的。他的研究结果本质上是建立在严密的论证形式之上的。

欧拉采用了许多简明、精炼的数学符号。譬如，用e表示自然对数的底，f(x)表示函数，$\int_n$ 表示数n的约数之和，Δy, $\Delta^2 y$…表示有限差分，Σ表示求和，i表示虚数单位$\sqrt{-1}$，还有现代三角符号，等等，这些符号从18实际一直沿用至今。

在数学领域内，18世纪可以正确地称为欧拉世纪．约翰·伯努利在给欧拉的一封信中说过：“我介绍高等分析的时候，它还是个孩子，而你正在把它带大成人．”P．S．拉普拉斯(Laplace)常常告诉年轻的数学家们：“读读欧拉，读读欧拉，他是我们大家的老师。”欧拉对数学发展的影响不限于那个时期。19世纪最著名的数学家C．F．高斯(Gauss)、A．L．柯西(Cauchy)、M．И。

罗巴切夫斯基(Л о б а ч е в с к и й)、П．Л．切比雪夫(Ч е б ы ш е в)、C．F．B．黎曼(Riemann)常从欧拉的工作出发开展自己的工作。高斯说过：“欧拉的工作的研究将仍旧是对于数学不同范围的最好学校，并且没有任何别的可以替代它。”人们还可以从由切比雪夫奠基的圣彼得堡数学学派追溯欧拉开辟的众多道路。

1．数论

古代希腊和中国的数学家研究过数的性质。17世纪，P．de费马(Fermat)开辟了近代数论的道路。他提出了若干值得注意的算术定理，但几乎未留下任何证明。欧拉的一系列成果奠定了作为数学中一个独立分支的数论的基础。

欧拉的著作有很大一部分同数的可除性理论有关。他很早就采用了同余概念。1736年，欧拉首先证明了数论中重要的费马小定理。1760年，他引进函数，给出了这个定理的重要推广：如果a与n互素，则$a^{\varphi(n)}-1$可以被n整除，这就是欧拉定理，其中，表示小于n且与n互素的正整数的个数，叫做欧拉数。欧拉在数论中最重要的发现是二次互反律。它表述在1783年的一篇论文中，

但未给予证明。这个定理的叙述实际上早已包含在欧拉以前写的论文中了，只是未引起同时代人的注意。二次互反律是18世纪数论中的最富首创精神、可能引出最多成果的发现。后来，A. M. 勒让德(Legendre)重新发现并不完全地证明了它。高斯参考了欧拉、勒让德的著作，于1801年发表了二次互反律的完整的证明. 他把这个初等数论中至关重要的定理誉为“算术中的宝石”。二次互反律后来引起了许多数学家，如E. E. 库默尔(Kummer)、D. 希尔伯特(Hilbert)、E. 阿廷(Artin)等人对代数数域中高次互反律的研究，出现了不少意义深刻的工作。1950年，I. R. 沙法热维奇(Shafarevich)建立了广义互反律。

欧拉还致力于丢番图(Diophantus)分析的研究。费马重新发现了求解方程的问题(其中，A是整数但非平方数)，J. 沃利斯(Wallis)全部解出了这个问题。欧拉在1732—1733年的一篇论文中，误称其为佩尔(Pell)方程，这个名称也就这样固定下来了。1759年，欧拉通过把$\sqrt{A}$表成一个连分式，给出了解佩尔方程的方法。此后不久，J. L. 拉格朗日(Lagrange)开始对这个问题进行全面研究。对费马关于“不定方程$x^n+y^n=z^n$ ($n > 2$)没有正整数解”的著名猜测(此处x，y，z均为整数，$xyz \neq 0$)，1753年欧拉证明n=3时，它是正确的。欧拉的证明建立在无穷递降法的基础上，并利用了形如$a+b\sqrt{-3}$的复数。他在《代数学入门》(Vollstndige Anleitung Zur Algebra，1770，德文版)一书中详尽地叙述了这个证明。此书两卷，最先以俄文发表于圣彼得堡，其中，第二卷有很大篇幅是关于丢番图分析的研究。

欧拉用算术方法和代数方法研究上述问题，他还首先在数论中运用分析方法，开解析数论之先河。他利用调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

的发散性，简单而巧妙地证明了素数个数无穷的欧几里得定理。1737年，欧拉推出了下列著名的恒等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\xi}}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{\xi}}\right)^{-1}$$

式中$\prod_{p}$表示对所有的素数求积，等式左边即后来黎曼所称的函数。1749年，欧拉应用发散级数求和法和归纳法，发现了与ζ(s)，ζ(1-s)和Γ(s)有关的函数方程，即：对于实的s，有

$$\zeta\left(1-s\right)=2\left(2\pi\right)-s\cos\frac{\pi_{s}}{2}\Gamma\left(s\right)\zeta\left(s\right)$$

黎曼后来重新发现并建立了这个函数方程，他是第一个定义ζ函数，也是第一个定义自变量为复值的ζ函数的科学家。19世纪和20世纪，ζ函数已成为解析数论最重要的工具之一，尤其在P．G．L．狄利克雷(Dirichlet)、切比雪夫、黎曼、J．阿达马(Hadamard)等人关于素数分布的研究中更是如此。

欧拉还研究了数学常数以及同超越数论有关的重要问题．J．H．兰伯特(Lambert)1768年证明e和π是无理数时，曾用连分数表示e，但连分式是欧拉首先采用并奠定理论基础的。1873年，C．埃尔米特(Hermite)证明e是超越数。1882年，F．林德曼(Lindemann)应用欧拉公式$e^{i\pi}=-1$ (欧拉1728年发现的)，证明了π是超越数，因此，用直尺和圆规作出一个正方形和已知圆面积相等是不可能的，从而解决了古希腊遗留下来的“化圆为方”问题。欧拉常数

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

的超越性的猜测，则至今尚未解决。

2．代数

17世纪，代数是人们兴趣的一个重要中心。到了18世纪，它变成从属于分析，人们很难把代数和分析互相区别开来。欧拉很早就把对数定义为指数，并于1728年在其一篇未发表的手稿中引入e作为自然对数的底。1732年，欧拉对G．卡尔达诺(Cardano)的三次方程解法作出了第一个完整的讨论。他还试图找到用根式表示的高于四次的方程之解的一般形式，诚然这是徒劳的。1742年，欧拉在给尼古拉第一·伯努利和哥德巴赫的信中，第一次提出了所有实系数的n次多项式都可以分解为实一次或实二次因式的定理，即具有n个形如a + bi的根。这是和代数基本定理等价的重要命题，先后由达朗贝尔和欧拉证明。他们的证明思路不同，但都不够完全。19世纪有了更精确的证明。前述的欧拉《代数学入门》一书，是16世纪中期开始发展的代数学的一个系统总结。此书出版后，很快被译成英文、荷兰文、意大利文、法文等多种文字，对于19世纪和20世纪代数学教科书的编写产生极大影响。

3．无穷级数

在17世纪建立微积分的同时，无穷级数也进入了数学的实践。18世纪是级数理论的形式发展时期。在欧拉的著作中，无穷级数起初主要用作解题的辅助手段，后来成为他研究的一个科目，实际知识达到了很高水平。前面提到的对著名的ζ函数的研究就是一个例子。其出发点是整数平方的倒数求和问题。

在17世纪建立微积分的同时，无穷级数也进入了数学的实践。18世纪是级数理论的形式发展时期。在欧拉的著作中，无穷级数起初主要用作解题的辅助手段，后来成为他研究的一个科目，

实际知识达到了很高水平，前面提到的对著名的函数的研究就是一个例子，其出发点是整数平方的倒数求和问题

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(z)$$

伯努利兄弟、J. 斯特灵(Stirling)和其他一些数学家都曾徒劳地探讨过它。1735 年，欧拉解决了一个普遍得多的问题，证明了对于任意偶数 2K > 0，

$$\zeta^{(2K)}=a_{2k\pi}{}^{2k},$$

这里是有理数，它后来分别通过欧拉 - 马克劳林求和公式的系数与伯努利数来表示。欧拉还给出了当 2K + 1 是前面几个小奇数时公 式$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2K+1}}$ 的和，但对所有的奇数 2K+1，$\zeta(2K+1)$的算术性质至今尚不清楚。

欧拉大约在 1732 年发现了上述求和公式，他于 1735 年给出了证明。C. 马克劳林(Maclaurin)不谋而合地在几年后又独立地发现了它，并且所用的方法稍好些，也更接近于今天所用的方法。这个公式是有限差演算的最重要的公式之一。有限差演算方法是由B. 泰勒(Tayler)和斯特灵奠基的。欧拉的《微分学原理》(Introductio calculi differentialis， 1755)是有限差演算的第一部论著，他第一个引进差分算子。借助于这个求和公式，1735 年，欧拉把前述的欧拉常数 γ 的值计算到小数点后第 16 位

$$\gamma=0.57721566\cdots$$

欧拉在大量地应用幂级数时，还引进了新的极其重要的傅里叶三角级数类。1744年他在给哥德巴赫的一封信中，谈到了用三角级数表示代数函数的例子：

$$\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots$$

它发表在 1755 年的《微分学原理》中。此后，他又得到了其他的展开式。1777 年，为了把一个给定函数展成在(0，π)区间上的余弦级数，欧拉又推出了傅里叶系数公式。欧拉的论文迟至 1798 年才发表。他采用的正是现行通用的逐项积分方法。J. B. J. 傅里叶(Fourier)对欧拉的工作并不了解，他于 1807 年得到相同的公式。欧拉也不知克莱罗 1759 年的相应工作。

欧拉还把函数展开式引入无穷乘积以及求初等分式的和，这些成果在后来的解析函数一般理论中占有重要的地位。无穷级数、无穷乘积和连分式之间许多相互变换的方法也是欧拉发现的。

形式观点在 18 世纪无穷级数的工作中占统治地位。级数被看成是无穷的多项式，并且就当作多项式来处理，对其收敛和发散的问题是不太认真对待的。欧拉多少意识到收敛性的重要，他

也看到了关于发散级数的某些困难，特别是用它们进行计算时产生的困难。为了寻求收敛的一般理论，欧拉确信且着手进行建立发散级数转变为收敛级数的法则这一艰苦的工作。为此，他对级数的和这一概念提出了新的更广泛的定义。他还提出两种求和法。这些丰富的思想，对19世纪末、20世纪初发散级数理论中的两个主题，即渐近级数理论和可和性的概念产生了深远影响。

4．函数概念

18世纪中叶，分析学领域有许多新的发现，其中不少是欧拉自己的工作。它们系统地概括在欧拉的《无穷分析引论》(图1)、《微分学原理》和《积分学原理》组成的分析学三部曲中。这三部书是分析学发展的里程碑式的著作。它们至今饶有兴味，尤其《无穷分析引论》的第一卷更是如此。专家们可以从这些著作中追寻分析学许多富有成果的方法的发展足迹。

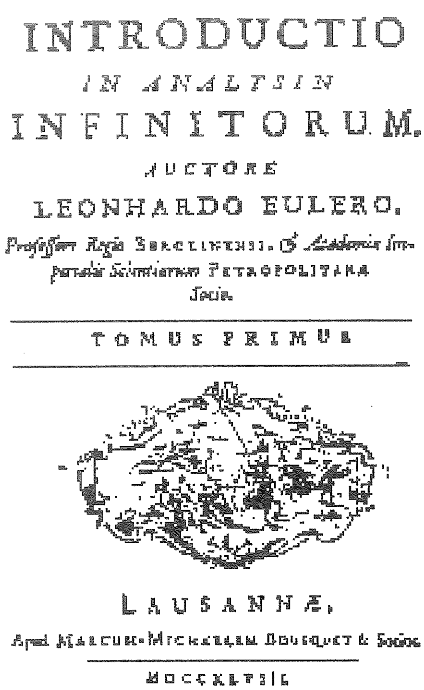

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio Berolinensi, & Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae Socio.
TOMUS PRIMUS.
LAUSANNAE,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLVIII.

图1《无穷分析引论》的扉页，洛桑，1948年

《无穷分析引论》共两卷，它是第一本沟通微积分与初等分析的书。在这部书中，欧拉第一次清晰地论述了数学分析是研究函数的科学，并对函数概念作了更加透彻的研究。他一开头，就把函数定义为由一个变量与一些常量通过任何方式形成的解析表达式。在这一点上，他继承了约翰·伯努利的思想。欧拉写道，函数间的原则区别在于组成这些函数的变量与常量的组合法不同。他在书中给出了现今还广泛应用的函数的分类。欧拉还区分了显函数与隐函数，单值函数与多值函数。他按照自己和所有同时代的人的经验，坚信所有的函数都能展成级数。欧拉认为函数的自变量不仅可以取实值，也可以是虚值，这一见解极其重要。

在欧拉、达朗贝尔和丹尼尔·伯努利等许多数学家卷入的关于弦振动问题的研究中，发生了关于函数概念的争论。它促使欧拉去推广自己的函数概念。1755年，欧拉在《微分学原理》一书中给函数下了一个新定义："如果某些量这样地依赖于另一些量：当后者改变时它经受变化，那么称前者为后者的函数。"不过，在《无穷分析引论》中，欧拉就已把函数当作对应值加以论述。

5．初等函数

《无穷分析引论》第一卷共18章，主要研究初等函数论。其中，第八章研究圆函数，第一次阐述了三角函数的解析理论，并且给出了棣莫弗(de Moiré)公式

$$e^{\pm xi} = \cos x \pm i \sin x$$

的一个推导。虽然R．柯特斯(Cotes)在1714年发表了这个公式且与欧拉给出的略有不同，但只有欧拉才使该公式得到了广泛的应用。欧拉在《无穷分析引论》中研究了指数函数和对数函数，他给出著名的表达式

$$e^{x} = \lim_{i \to \infty}\left(1 + \frac{z}{i}\right)^{i}$$

（这里i表示趋向无穷大的数；1777年后，欧拉用i表示$\sqrt{-1}$），但仅考虑了正自变量的对数函数。1751年，欧拉发表了完备的复数理论。他断言：对正实数而言，对数只有一个实值，其余都是虚值；但对于负实数或虚数而言，对数的一切值都是虚的。欧拉对这个问题的成功解答，实际上结束了此前1747—1748年在莱布尼茨和约翰·伯努利之间，达朗贝尔和欧拉本人之间通过信件进行的关于负数的对数的争论。但他的工作当时并未被人们接受。

6．单复变函数

通过对初等函数的研究，达朗贝尔和欧拉在1747—1751年间先后得到了(用现代术语表达的)复数域关于代数运算和超越运算封闭的结论。他们两人还在解析函数的一般理论方面取得了最初的进展。1752年，达朗贝尔在研究流体力学时发现了把解析函数u(x，y)＋iv(x，y)的实部和虚部连结在一起的方程。177年，欧拉在提交圣彼得堡科学院的一篇论文中推出了同样的方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

其要点是借助于虚代换z=x ＋ iy，利用实函数去计算复函数的积分，展

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

欧拉还借助于保角映射把复变解析函数用于理论制图学等方面的研究。他在1768年的一篇论文中，利用复变函数，设计了一种从一个平面到另一个平面的保角映射的表示方法。1775年，他又证明球面不可能全等地映入平面。这里，他再一次用了复变函数而且讨论了相当一般的保角表示。

欧拉的这些思想，19世纪在柯西、黎曼阐发解析函数的一般理论时，都获得了深入的发展。譬如，上述达朗贝尔和欧拉的方程就是以柯西和黎曼的名字命名的。

7．微积分学

欧拉的《微分学原理》和《积分学原理》二书对当时的微积分方法作了最详尽、最有系统的

解说，他以其众多的发现丰富了无穷小分析的这两个分支。

在《微分学原理》中，欧拉详尽地研究了变量替换下的微分公式。他在1734年的一篇论文中证明，若z=f(x，y)，则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

导出了函数f(x，y)恰当微分的必要条件。1736年，他又揭示了关于齐次函数的定理，即若z是x和y的n次齐次函数，则

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$$

他还就函数f(x)和f(x，y)的极值问题，得到许多重要的结果。

欧拉在《积分学原理》第一卷中，用相当现代的方式叙述了不定积分的方法。他创造了“欧拉代换”等许多新方法。他计算了许多困难的定积分，进一步奠定了特殊函数论的基础。例如，1729年欧拉就研究了序列1！，2！，…，n！，…的插值法．他引入了B函数和Γ函数，继而还发现了B函数和Γ函数的许多性质，如：

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

在椭圆积分理论上，欧拉的主要贡献是发现了加法定理。1770年他对二重定积分有了清楚的概念，还给出了用累次积分计算这种积分的程序。

《微分学原理》和《积分学原理》是欧拉那个时代的标准课本。他的形式化方法使微积分从几何中解放出来，从而使它建立在算术和代数的基础上。这至少为后来基于实数系统的微积分的根本论证开辟了道路。

8．微分方程

《积分学原理》还展示了欧拉在常微分方程和偏微分方程理论方面的众多发现。他和其他数学家在解决力学、物理问题的过程中创立了微分方程这门学科。

在常微分方程方面，欧拉在1743年发表的论文中，用代换$y=e^{kx}$给出了任意阶常系数线性齐次方程的古典解法，最早引入了“通解”和“特解”的名词。1753年，他又发表了常系数非齐次线性方程的解法，其方法是将方程的阶数逐次降低。欧拉早在1740年左右就知道并且在潮汐和行星轨道摄动的著作中应用过常数变易法。他在1734—1735年领会了积分因子的概念，提供一个方法，并在1768—1770年的工作中广泛地发展了积分因子法，把它应用于许多一阶微分方程类

型，还推广到高阶方程。欧拉对黎卡提(Riccati)方程的性质多有研究。1768 年，他给出了一个从特殊积分鉴别奇解的判别法。这一年，欧拉在其有关月球运行理论的著作中，创立了广泛用于求带有初值条件的方程

$$\frac{dy}{dx}=f\left(x,y\right)$$

的近似解的方法，次年又把它推广到二阶方程。这个现称“欧拉折线法”的方法，为 19 世纪柯西关于解的存在性的严格证明和数值计算提供了重要途径。

欧拉在 18 世纪 30 年代就开始了对偏微分方程的研究。他在这方面的最重要的工作，是关于二阶线性方程的。数学物理中的许多问题都可以归结为二阶线性方程。弦振动问题是一个著名的例子。1747 年，达朗贝尔首次建立了弦振动方程

$$\frac{\partial^2 y\left(t,x\right)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y\left(t,x\right)}{\partial x^2}$$

得到形如两个任意函数之和的解：

$$y\left(t,x\right)=\frac{1}{2}\phi\left(at+x\right)+\frac{1}{2}\psi\left(at-x\right)$$

欧拉随即对达朗贝尔的方法作了进一步研究。他在允许什么函数可以作为初始曲线，因而也可以作为偏微分方程的解的问题上，有全然不同的想法。于是，这两位数学家，还有丹尼尔 · 伯努利、拉格朗日、拉普拉斯和其他一些数学家，都卷进了一场旷日持久的激烈论战，延续了半个多世纪，直到傅里叶的《热的分析理论》(The- órie analytique de la chaleur，51822)发表为止。其间，欧拉把特征线法发展得更加完善了。欧拉还在流体动力学和鼓膜振动、管内空气运动等问题中接触到数学物理方程。例如，位势方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$$

最早就出现在他1752年关于流体运动的论文


METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae Socio.
LAUSANNAE & GENEVAE,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLIV.

图 2《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的方法》的扉页，洛桑—日内瓦，1744 年

中。1766年，欧拉从圆膜振动问题得到后来所称的贝塞尔(Bassel)方程，并借助于贝塞尔函数Jn(x)来求解。

9．变分法

欧拉从1728年解决约翰 · 伯努利提议的测地线问题开始从事变分法的研究。1734年，他推广了最速降线问题。然后，着手寻找关于这种问题的更一般的方法。1744年，欧拉的《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的方法》(Methodus inveniendi lineas-curvas maximi minimive proprictate gaude-ntes)(图2)一书出版。这是变分学史上的里程碑，它标志着变分法作为一个新的数学分支的诞生。该书广泛使用了几何论证。书中系统地总结了欧拉在18世纪30年代和40年代初的一些成果，其中，包括欧拉1736年成功证明的关于使积分

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f\left(x,y,y'\right)dx$$

取极大或极小值的函数y(x)必须满足的常微分方程

$$f_y-\frac{d}{dx}\left(fy'\right)=0$$

以及大量应用的例子。这个以欧拉名字命名的方程，迄今仍是变分法的基本微分方程。

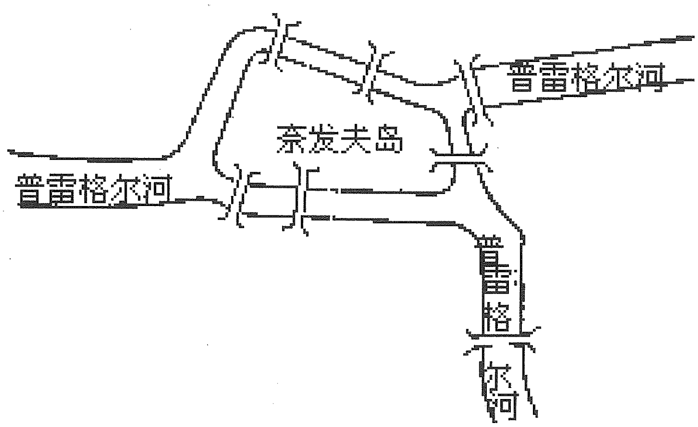
18世纪50年代中期，拉格朗日循着欧拉的思路和结果，从纯分析方法的角度，创造了应用于变分演算的新算法和新符号，得到了更完善的结果．欧拉随后放弃了自己以前的说明，并对拉格朗日的方法作了详细、清晰的解释。欧拉认为拉格朗日的方法是一种新的计算方法，并在自己的论文中正式将它命名为“变分法”(the calculus of variation)。1770年，欧拉在《积分学原理》第三卷中把变分法应用于具有常数限的二重积分的极值问题。其后不久，欧拉又提出了变分演算的另一种解释方法。他早期变分法研究中使用的直接方法，一个半世纪以后，也在寻找变分问题及相应的微分方程的精确解或近似解中获得独立的价值。

10．几何学

18世纪，坐标几何得到广泛的探讨。欧拉在《无穷分析引论》第二卷中引入了曲线的参数表示。他从二次曲线的一般方程着手，超越同时代的人，对二次曲线理论的代数发展做出了重要贡献。他用类比法研究三次曲线，还讨论了高次平面曲线。但是，欧拉的主要贡献是第一次在相应的变换里应用欧拉角，彻底地研究了二次曲面的一般方程。

在微分几何方面，欧拉于1736年首先引进了平面曲线的内在坐标概念，即以曲线弧长这一几何量作为曲线上点的坐标，从而开始了曲线的内在几何的研究。他将曲率描述为曲线的切线方向和一固定方向的交角相对于弧长的变化率。欧拉关于曲面测地线的研究是众所周知的。然而，

更重要的是他在曲面论方面的开拓性研究。1760年，欧拉在《关于曲面上曲线的研究》(Recherches sur la courbure des surfaces)中建立了曲面的理论。这本著作是欧拉对微分几何最重要的贡献，是微分几何发展史上的里程碑。G．蒙日(Monge)和其他几何学家后来的研究就是从曲面论开始的。18世纪60年代和70年代，欧拉继续研究并得到了用主曲率表示任意法截面上截线曲率的著名公式以及曲面可展性的、分析的必要充分条件。1775年，他还成功地重新阐述了空间曲线的一般理论。



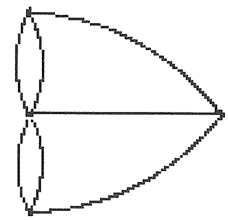


图 3a　哥尼斯堡七桥游戏问题　　图 3b　哥尼斯堡七桥游戏问题抽象简化图

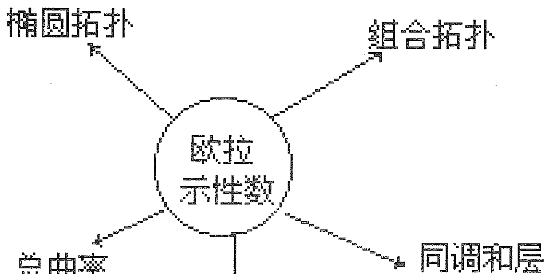


图 4　欧拉示性数是整体不变量的一个源泉

欧拉对拓扑学的研究也具有第一流的水平。1735年，欧拉用简化(或理想化)的表示法解决了著名的哥尼斯堡七桥游戏问题(如图3，有7座桥，问是否可一次走遍，不许重复也不许遗漏。)他得到具有拓扑意义的河-桥图的判断法则，即现今网络论中的欧拉定理。1750年，欧拉在给哥德巴赫的一封信中列举了多面体的一些性质。其中，有一条是：如果用V，E和F分别表示闭的凸多面体的顶点数、棱数和面数，则有V-E + F=2。次年他给出了这条性质的一个证明。尽管100年

后人们发现笛卡儿早就知道这一性质，但是，第一个认识V-E + F这个“交错和”重要意义的人似乎是欧拉。他之所以对这一关系感兴趣，是要用它来作多面体的分类。欧拉示性数V-E + F以及由H．庞加莱(Poincaré)提出的在多维复形中的推广是现代拓扑学的主要不变量之一，陈省身言简意赅地说过：“欧拉示性数是大量几何课题的源泉和出发点。”他用图形(图4)表示了这种关系。

力 学

欧拉在1736年的《力学》导言中，概述了对这门科学各个分支的巨大研究计划。与其前辈采用综合法、几何法来研究力学不同，欧拉第一个意识到把分析方法引入力学的重要性。欧拉系统而成功地将分析学用于力学的全面研究。他的《力学或运动科学的分析解说》(图5)的书名就清楚地表达了他的这一思想。欧拉在力学的各个领域都有突出贡献，他是刚体力学和流体力学的奠基者，弹性系统稳定性理论的创始人。

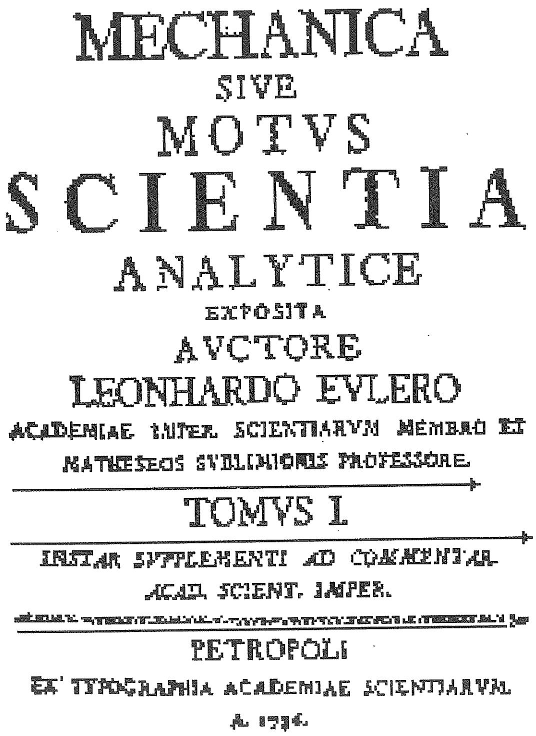

MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.
TOMVS I.
INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.
PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

图5 《力学或运动科学的分析解说》的扉页，
圣彼得堡，1736年

1．一般力学

《力学或运动科学的分析解说》研究质点的运动学和动力学，是用分析的方法来发展牛顿质点动力学的第一本教科书。此书共分两卷：第一卷研究质点在真空中和有阻力的介质中的自由运

动；第二卷研究质点的强迫运动。欧拉的这本著作与以往的著作迥然不同，他试图通过定义和论证的结合，来证明力学是一门能一步一步推演出的许多命题的“合理的科学”。他所提供的基本概念和定律接近我们今天所知道的力学体系。他用解析形式给出了运动方程式，并确认它们构成了整个力学的基础。因此，具有重要的历史意义。

1765年，欧拉的著作《刚体运动理论》(Theoria motus corporum solidorum)出版。此书与上述《力学》相互关联。欧拉得到了刚体运动学和刚体动力学的最基本的结果，其中包括：刚体定点运动可用三个角度，即欧拉角的变化来描述；刚体定点转动时角速度变化和外力矩的关系；定点刚体在不受外力矩时的运动规律，以及自由刚体的运动微分方程等等。欧拉先用椭圆积分解决了刚体在重力下绕固定点转动的问题的一种可积情形，即欧拉情形。此后一个多世纪，拉格朗日于1788年、C．B．柯瓦列夫斯卡娅(К о в а л е с к а я)于1888年才相继完成全部可积情况的工作，彻底解决了经典力学中的这一著名难题。

2．流体力学

欧拉根据早期积累的经验而写成的两卷集《航海学》(Seientianavalis)，1749年在圣彼得堡出版。其中，第一卷论述浮体平衡的一般理论，第二卷将流体力学用于船舶。该书对浮体的稳定和浮体在平衡位置附近的轻微摆动问题作了独创性的阐述。1752年至1755年，欧拉相继写了“流体运动原理”(Prinapia motus flu-idorrum，1761)和另外三篇详细阐述流体力学解析理论的权威论文，即“流体平衡的一般原理”(Principes généraux de l'état d'é quilibre des fluides)、“流体运动的一般原理”(Principes géné-raux du mouvement des fluides)和“流体运动理论续篇(Conti-nuation des recherches sur la thé orie du mouvemont des flui- des)。这三篇论文于1757年同时发表。欧拉创造性地用偏微分方程解决数学物理问题。他在这些论著中给出了流体运动的欧拉描述法，提出了理想流体模型，建立了流体运动的基本方程，即连续介质流体运动的欧拉方程，奠定了流体动力学的基础。此外，他还仔细地研究了管内液体和气体的运动，管内空气的振动和声音的传播等许多具体问题，以及水力技术问题。

除了在一般力学、流体力学方面的上述工作外，欧拉在《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的方法》一书的附录一中，应丹尼尔·伯努利的请求，将变分演算应用于研究弹性理论的某些问题。这些问题，欧拉从1727年就开始研究。这个附录是第一部应用数学来研究弹性理论的著作。欧拉率先从理论上研究了细压杆的弹性稳定问题。他提出了柱的稳定概念，以及一端固定、另一端自由的柱的临界压力公式。在同书的附录二中，欧拉还与莫佩蒂几乎同时独立地得出了力学中的最小作用原理。欧拉为力学和物理学的变分原理的许多研究奠定了数学基础。这种变分原理至今仍在科研中应用。

天 文 学

对自然界的深刻研究是数学最富饶的源泉。18世纪的数学家对天体运行规律的探索极为重

视。欧拉对天文学作过大量的研究，他最出色的著作都和天体力学有关。这些论著特别吸引当时的科学家，并多次荣获英、法等国的奖金。

17 世纪，牛顿提出著名的万有引力定律，从力学原理上解释了月球运动的规律。此后，“三体问题”，特别是太阳、地球和月亮，成了 18 世纪科学家十分关注的重要课题。三体问题的摄动理论最先应用于月球的运动。欧拉、克莱罗等人曾试图求得一般三体问题的精确解，终因困难至甚转而采用近似方法。1745 年，克莱罗和达朗贝尔用万有引力定律算得月球绕地球运转的近地点的周期为 18 年，而实际观察则表明它应该是 9 年。这曾使得人们从总体上对牛顿力学体系的正确性产生怀疑，甚至欧拉和其他一些科学家也认为牛顿万有引力定律需要作某些修正。1749 年，克莱罗确认：理论值和观察值之间的误差，是由于求解相应微分方程局限于第一次逼近所致。当他作第二次逼近演算后，结果是令人满意的。为此，欧拉向圣彼得堡科学院举荐克莱罗的论文，使之获得该院 1752 年奖金。不过，欧拉仍不满意并继续研究。1753 年，他的《月球运动理论》(Theoria motus lunae exhibens omnes ejus inaequalitales)一书出版。在这部著作中，欧拉阐述了求三体问题近似解的新颖方法，亦称“欧拉第一月球理论”。他得到的数值结果也与牛顿万有引力理论一致。

欧拉的第一月球理论对当时的天文学和航海事业产生了很重要的影响。1755 年，格丁根大学的天文学家 T. 迈尔(Mayer)根据欧拉的理论制成了一张月球运行表。它对舰船导航极有价值。经过 10 年的航海实践，1765 年英国国会终于将半个世纪前悬赏的奖金授予迈尔的遗孀。同时，也奖给欧拉三百英磅奖金，以表彰他为此所作的开创性的理论工作。

1772 年，欧拉的另一本天文学著作《月球运动理论和计算方法》在圣彼得堡出版。他在此书中详细阐述了“欧拉第二月球理论”。由于种种原因，直到 19 世纪末，当 G. W. 希尔(Hill)发展了欧拉月球理论中关于以直角坐标为基本变量和旋转坐标系的概念，建立了一种新的月球运动理论后，人们才可能对欧拉的这种新方法的价值作出正确的评价。

欧拉一生还写了许多关于彗星和行星轨道计算的论著。1748 年，他在一篇论文中最先用参数变值法研究木星和土星运动的摄动，获得了巴黎科学院的奖金。1769 — 1771 年，欧拉已双目失明，他以坚强的毅力和永不懈怠的进取精神，继续研究木星和土星、地球和其他行星的相互引力引起的摄动。“春蚕到死丝方尽”，欧拉对天文学的研究一直延伸到其生命最后的一瞬。

物 理 学

18 世纪物理学的进展并不像 17 世纪前 80 年那样不寻常，它很少产生伟大的实验物理学家。欧拉作为一位物理学家，与丹尼尔 · 伯努利也不一样，其主要贡献是从数学的角度详尽地阐述前面已讨论过的那些类问题。欧拉所涉及的各种物理问题，当时多半与数学分析无缘。他渴望创造一种与物理学界取得一致的数学理论。他广泛地将数学应用到整个物理领域，并在力学、声学、光学和电磁学等方面做出了许多重要贡献。

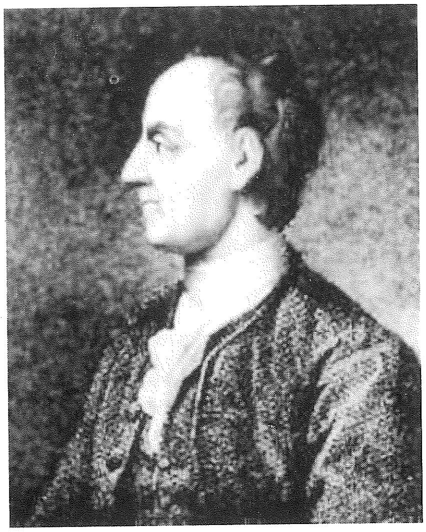
1644 年，笛卡儿曾经假定星际空间充满着物质，并且它们在很大的漩涡中运动。这在欧洲大

陆人们的思想中，直到近18世纪中叶时还保持着它的地位。1724年，欧拉被授予哲学硕士学位，他发表的演讲就是对牛顿和笛卡儿的哲学思想进行比较。欧拉不是笛卡儿自然哲学体系的代表人物，但是，他更接近于这个自然哲学体系。欧拉否认空虚空间中的运动和远距离作用的可能性，他认为宇宙中充满了以太，并且用以太的力学性质来解释观察到的现象的多样性是可能的。他还将单磁流的概念引入电磁学。

欧拉在广为流传的《关于物理学和哲学问题给德韶公主的信》中，提出了一切物理现象都是以太与物质相互作用的结果的思想，企图建立物理世界的统一图象。这一思想对18世纪、19世纪物理学的发展是重要的。欧拉关于电的本质的观点是M。法拉第(Faraday)和J．C．麦克斯韦(Maxwell)电磁场理论的雏型。他的以太理论影响了黎曼。

欧拉在物理学方面建立的人造模型和提出的一些假设，寿命都不长。但是，他的光学著作在18世纪的物理学中起了重要作用。他否定权威的光粒子论，他是这个世纪提倡波动说的唯一的杰出科学家。他认为光的起因是以太特有的振荡的结果。欧拉1746年发表的《光和色彩的新理论》(Nova theoria lucis et colorum)解释了一些光学现象。他同伦敦的光学仪器商多伦在色散理论上发生过争论，双方都有正误之处。1758年，多伦创造消色差望远镜送交英国皇家学会，轰动了整个欧洲。这是光学技术上的一个转折点，而欧拉的三大卷本《屈光学》(Dioptrica，1771)则奠定了光学体系的计算基础。此书第一卷论述光学原理，第二、三卷分别论述望远镜和显微镜的构造，只是书中的数学模型超出了实验光学家的理解力。值得一提的是，欧拉1739年的音乐新理论也有超出音乐家理解力的地方，人们说，它对数学家“太音乐”了，而对音乐家“太数学”了。有人认为，欧拉的某些思想在现代音乐家的著作中得到了发展，欧拉给后人留下了极其丰富的科学遗产和为科学献身的精神。历史学家把欧拉同阿基米德(Archimedes)、牛顿、高斯并列为数学史上的“四杰”。数学家J．R．纽曼（Newman）1956年称欧拉是“数学家之英雄”。现在，英雄欧拉安详地躺在俄罗斯地土地上。1983年，在欧拉逝世200周年之际，各国学者在列宁格勒（即圣彼德堡）、西柏林、东柏林和莫斯科先后隆重集会纪念其丰功伟绩，而在欧拉的故乡——巴塞尔，则出版了各国著名科学家和科学史研究、纪念他的巨型文集《列昂哈德·欧拉——生活事业文献集》(Leonhard Euler,1707 － 1783,Beitra ge zu leben undwerk,1983)。法国数学家L.巴斯德（Pasteur）说得好：“科学没有国籍，但是科学家有祖国，他对于国家的光荣应当尽心竭力，死而后已。热烈的爱国心会使他有勇气和毅力承担艰难而伟大的工作；而这工作，正是对人类有益的。”（在丹麦哥本哈根万国医学会上的讲话，1884）以此赞美欧拉，他是当之无愧的。

《数学的奇妙》之欧拉与幻方世界



这个奇妙的幻方是伦哈德·欧拉在18世纪创造的。和大多数幻方一样，它的行、列和对角线上的总和都相等，在这幻方的情形中是260。此外，这幻方里面有4个小幻方，它们的行和列上的总和都是130。更加迷人的是，使国际象棋中的马从1出发，按照马的走法，可以依次到达整个幻方从1到64每一个数。

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

《数学家小故事》之

欧拉智改羊圈

事情是因为星星而引起的。当时，小欧拉在一个教会学校里读书。有一次，他向老师提问，天上有多少颗星星。老师是个神学的信徒，他不知道天上究竟有多少颗星，圣经上也没有回答过。其实，天上的星星数不清，是无限的。我们的肉眼可见的星星也有几千颗。这个老师不懂装懂，回答欧拉说："天上有多少颗星星，这无关紧要，只要知道天上的星星是上帝镶嵌上去的就够了。"

欧拉感到很奇怪：天那么大，那么高，地上没有扶梯，上帝是怎么把星星一颗一颗镶嵌到天幕上的呢？上帝亲自把它们一颗一颗地放在天幕，他为什么忘记了星星的数目呢？上帝会不会太粗心了呢？

他向老师提出了心中的疑问，老师又一次被问住了，涨红了脸，不知如何回答才好。老师的心中顿时升起一股怒气，这不仅是因为一个才上学的孩子向老师问出了这样的问题，使老师下不了台，更主要的是，老师把上帝看得高于一切。小欧拉居然责怪上帝为什么没有记住星星的数目，言外之意是对万能的上帝提出了怀疑。在老师的心目中，这可是个严重的问题。

在欧拉的年代，对上帝是绝对不能怀疑的，人们只能做思想的奴隶，绝对不允许自由思考。小欧拉没有与教会、与上帝"保持一致"，老师就让他离开学校回家。但是，在小欧拉心中，上帝神圣的光环消失了。他想，上帝是个窝囊废，他怎么连天上的星星也记不住？他又想，上帝是个独裁者，连提出问题都成了罪。他又想，上帝也许是个别人编造出来的家伙，根本就不存在。

回家后无事，他就帮助爸爸放羊，成了一个牧童。他一面放羊，一面读书。他读的书中，有不少数学书。

爸爸的羊群渐渐增多了，达到了100只。原来的羊圈有点小了，爸爸决定建造一个新的羊圈。他用尺量出了一块长方形的土地，长40米，宽15米，他一算，面积正好是600平方米，平均每一头羊占地6平方米。正打算动工的时候，他发现他的材料只够围100米的篱笆，不够用。若要围成长40米，宽15米的羊圈，其周长将是110米（15+15+40+40=110）父亲感到很为难，若要按原计划建造，就要再添10米长的材料；要是缩小面积，每头羊的面积就会小于6平方米。

小欧拉却向父亲说，不用缩小羊圈，也不用担心每头羊的领地会小于原来的计划。他有办法。父亲不相信小欧拉会有办法，听了没有理他。小欧拉急了，大声说，只有稍稍移动一下羊圈的桩子就行了。

父亲听了直摇头，心想："世界上哪有这样便宜的事

情？”但是，小欧拉却坚持说，他一定能两全齐美。父亲终于同意让儿子试试看。

小欧拉见父亲同意了，站起身来，跑到准备动工的羊圈旁。他以一个木桩为中心，将原来的40米边长截短，缩短到25米。父亲着急了，说："那怎么成呢？那怎么成呢？这个羊圈太小了，太小了。"小欧拉也不回答，跑到另一条边上，将原来15米的边长延长，又增加了10米，变成了25米。经这样一改，原来计划中的羊圈变成了一个25米边长的正方形。然后，小欧拉很自信地对爸爸说："现在，篱笆也够了，面积也够了。"

父亲照着小欧拉设计的羊圈扎上了篱笆，100米长的篱笆真的够了，不多不少，全部用光。面积也足够了，而且还稍稍大了一些。父亲心里感到非常高兴。孩子比自己聪明，真会动脑筋，将来一定大有出息。

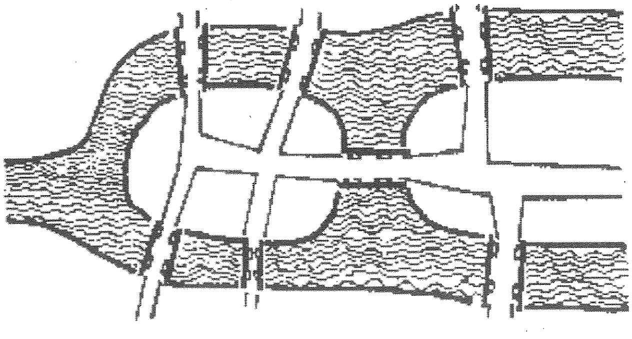
父亲感到，让这么聪明的孩子放羊实在是可惜了。后来，他想办法让小欧拉认识了一个大数学家伯努利。通过这位数学家的推荐，1720年，小欧拉成了巴塞尔大学的大学生。这一年，小欧拉13岁，是这所大学最年轻的大学生。

《数学趣闻集锦》之

欧拉与哥尼斯堡七桥问题

拓扑学起源于公元1736年一个著名问题——哥尼斯堡七桥问题——的解决。

哥尼斯堡是位于普累格河上的一座城市，它包含两个岛屿及连接它们的七座桥。该河流经城区的这两个岛。岛与河岸之间架有六座桥，另一座桥则连接着两个岛。星期天散步已成为当地居民的一种习惯，但试图走过这样的七座桥，而且每桥只走过一次却从来没有成功过。但直至引起瑞士数学家欧拉(Leonhard Euler，1707 — 1783)注意之前，没有人能够解决这个问题。



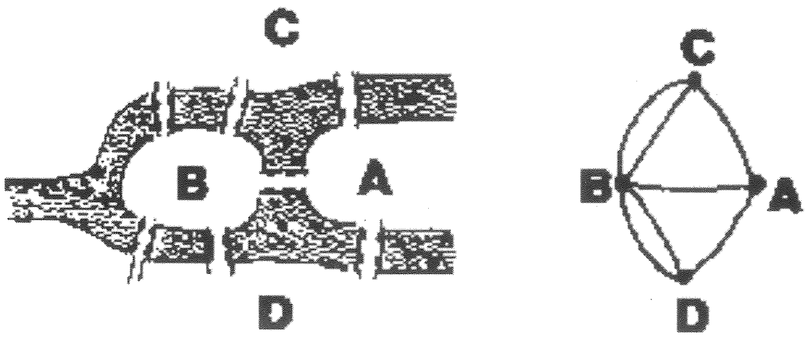
那时，欧拉正在圣彼得堡为俄国女皇凯瑟琳服务。在解决该问题的过程中，欧拉创立了一个数学分支，即后来人们所熟知的拓扑学。他在解哥尼斯堡七桥问题时，采用了今天人们称之为网络的拓扑学知识。运用网络，欧拉证明了要走过哥尼斯堡的七座桥且每桥只通过一次是不可能的。

这一问题及欧拉的解答，开创了拓扑学研究的先河。拓扑学是一个相对较新的领域。19世纪，数学家们才开始对它以及其他的非欧几何开展研究。论述拓扑学的第一篇论文，写于1847年。

欧　拉

网 络

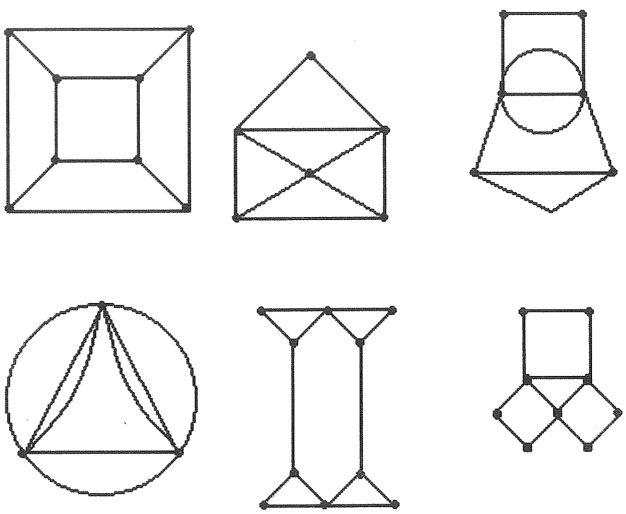
一个网络基本上可以看成是一个问题的图样。哥尼斯堡七桥问题的网络可以图解如下。



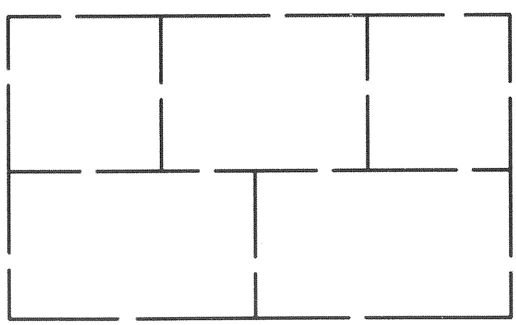
哥尼斯堡七桥问题的网络

一个网络由顶点和弧线组成。一个可以遍历的网络是指它可以准确一次地穿经所有的弧线，但顶点却可以通过任意次数。哥尼斯堡七桥问题的网络顶点，有如上图所示的A，B，C，D。注

意每个顶点发出的弧线数——A 为 3，B 为 5，C 为 3，D 为 3。由于这些数全是奇数，这类顶点我们称之为奇顶点或奇点．如果一个顶点发出的弧线数为偶数，我们则称之为偶顶点或偶点。欧拉发现，对于一个可以遍历的网络，其奇、偶点具有许多性质。特别地，欧拉注意到：一个奇顶点在这种遍历式的旅行中，要么是起点，要么是终点．由于一个遍历的网络只能有一个起点和一个终点，因而这种网络的奇点数不能多于两个。然而在哥尼斯堡七桥问题的网络中却有四个奇点，因而它是不可能被遍历的。



以上网络中哪一个是可以遍历的(即一笔而不重复地画成)?



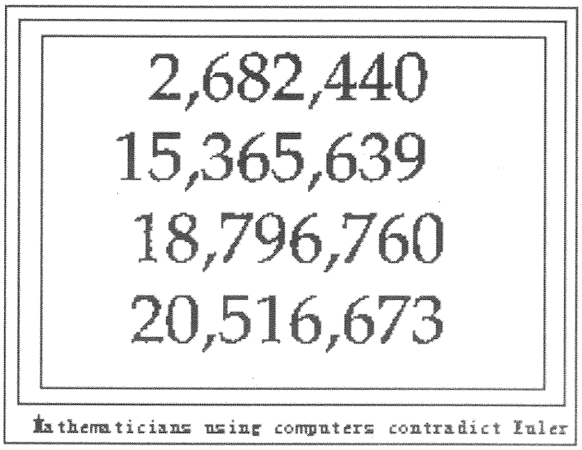
你能找到穿经每个门各一次且笔不离纸的通道吗？试证明你的结论。

《数学趣闻集锦》之

欧拉与费尔马定理

公元1769年，欧拉对费尔马大定理作了创新，提出了a4 + b4 + c4 = d4没有正整数解的假定。时隔二百年后的今天，数学家们用计算机找到了适合以上方程的整数解，从而推翻了欧拉的猜想。

哈佛大学的N · D · 埃尔钦斯发现了第一个例子：a = 2682440；b=15365639；c = 18796760；d = 20516673。而波士顿剑桥的一个号称“思维机器”团体的R · 弗莱，则发现了较小的一组正整数解。



数学家们用计算机驳倒了欧拉!

《数学趣闻集锦》之

欧拉与哥德巴赫猜想

在数的王国中，素数似乎处于一种非常特殊的位置．每一个数都有唯一的素因子分解式。例，12 的素因子分解式是 2 · 2 · 3，而 18 的素因子分解式是 3 · 3 · 2。

以下是一些素数特有的性质：

1) 2 是唯一的偶素数。

2) 没有比 5 大的素数能够以 5 为结尾。

3) 在素数(2，3，5，7)之后，其他的素数必须以 1，3，7，9 为结尾。

4) 两个素数的积绝不会是一个完全平方数。

5) 如果将 2 和 3 以外的素数加上 1 或减去 1，其结果必有一个被 6 整除。

2, 3, 5, 7, 11, 13,
17, 19, 23, 29,
31, 37, 41, 43,
47, 53, 59, 61,...

多少世纪以来，素数引起数学家们的浓厚兴趣。C · 哥德巴赫(Christian Goldbach，1690—64)曾写信给欧拉，说他坚信每个比 2 大的偶数都能够表示为另两个素数的和，例如：6 = 3 + 8 = 5+3；28 = 23+5。

对此，你是怎样想的呢?

欧拉没有能够证明它，也无法予以否定．这个问题至今仍未解决!

《名人命题》之欧拉的砝码问题

欧拉是举世闻名的数学家、物理学家和天文学家，正是他首次提出用 π 表示圆周率。他研究的范围几乎涉及当时所有的数学领域：微积分学、微分方程、解析几何等等。

一次，一位商人向欧拉提出了一个有趣的问题：如果只允许砝码放在天平的一端，要能称出 1～63 克任何整数克重的物品，至少要用多少个砝码？而如果允许砝码放在天平的两端（放在两端相当于可以做加减法，而放在一端则只能做加法），要称出 1～121 克之间任何整数克重的物品至少需要多少个砝码呢？

解答：

砝码只能放在一端,至少需要 6 个砝码，分别为：1 克、2 克、4 克、8 克、16 克和 32 克；在这种情况下：

1=1；2=2；3=1+2；4=4；5=4+1；6=2+4；7=1+2+4；8=8；..；63=1+2+4+8+16+32

总之，从 1 — 63 中的所有自然数，都可以用 1、2、4、8、16 和 32，适当选择这 6 个数的一些数，通过加法而得到。

砝码可以放在两端，则至少需要 5 个砝码：1 克、3 克、9 克、27 克和 81 克。在这种情况下：

1=1；2=3-1；3=3；4=1+3；5=9-3-1；6=9-3；7=9-3+1；8=9-1；9=9；10=9+1；11=9+3-1；..；121=1+3+9+27+81；

总之，从 1 — 121 中的所有自然数，都可以用 1、3、9、27 和 81，适当选择这 5 个数的一些数，通过加减法而得到。

大家可以自己选几个数试一试。

艾滋病疗法的评价与疗效的预测研究

陈炯宏　梁姗　杨春花

摘 要

本文运用统计回归模型对艾滋病疗法评价和疗效的预测问题进行了研究。根据已知数据反映的统计规律，划分患者类型，同时就CD4细胞的初始浓度、HIV病毒初始载量及时间对CD4细胞浓度在连续服药条件下的变化情况进行了分析，建立了疗效评价模型，并对疗法的效果进行了预测。

对问题一，首先对已知数据用聚类的方法按CD4初始浓度的大小把患者分为3类，然后对每类中数据进行统计分析，发现CD4细胞的初始浓度、HIV病毒初始载量及时间在患者连续服药的情况下对CD4细胞浓度的影响存在一定的统计规律，所以本文就这些影响因素建立了完全二次多项式统计回归模型，用MATLAB进行逐步回归，确定回归参数，模型参数满足各项统计量的检验标准；再对3种类型的患者的疗效进行预测，得到以下结论：初始CD4浓度小于40的患者，确定最佳终止治疗时间为连续用该药40周左右；初始CD4浓度小于100且大于40的患者，确定最佳终止治疗时间为连续服药38周左右；初始CD4浓度大于100的患者，确定连续服用该药大约35周后停止治疗为好。

对问题二，用9分制打分法建立疗效打分模型，仅以CD4细胞浓度为标准，对4种疗法在第8、16、24、32、40周时分别打分，根据分数的大小评出4种疗法的优劣，经计算得出采用三联药物联合治疗的第4种疗法(600 mg zidovudine加400 mg didanosine，再加400 mg nevirapine)效果最好，采用单药物治疗的第1种疗法(600mg zidovudine或400mg didanosine)的效果最差；由于CD4细胞浓度变化情况与时间的统计关系不好，对第4种疗法，本文对观测数据取均值，作出log(CD4 + 1)随时间的变化曲线，近似的反映log(CD4+1)与时间的变化关系，根据该曲线，本文认为在前12周左右的这种疗法的疗效保持在一个较好的水平，连续服用该药大约18周后停止治疗为好。

对问题三，考虑治疗方案的经济性，在对不发达国家供药时，综合考虑治疗效果和治疗的费用，本文引入指数K，表示增加单位(log(CD4 + 1))CD4细胞所花的平均治疗费用，然后对4种疗法分别计算指数K的值，K越小表示综合评价水平越高，最小的K值对应的方案为最优方案，经计算得到第3种疗法(600 mg zidovudine加2.25 mg zalcitabine)在考虑疗效性和经济性的情况下为最优疗法；再对第3种疗法用解决第二问的办法处理，按照本文规定的最佳治疗终止时间标准，预测连续服用该药大约15周后停止治疗为好。

本文采用完全二次多项式统计回归模型对艾滋病疗法进行了评价，并对疗效进行了预测，综合考虑了多方面的影响，能较好的反映现实情况，具有一定的实际意义和研究意义。

注：此文已获2006年全国大学生数学建模竞赛国家一等奖。梁姗系武汉大学数学与统计学院2003级信息与计算科学专业学生。现已保送至中国科学院数学与系统科学研究院深造。

关键词

统计回归模型 聚类 九分制打分模型 最佳治疗终止时间 统计检验

1 问题的重述

1.1 问题的背景

艾滋病是当前人类社会最严重的瘟疫之一，从1981年发现以来的20多年间，它已经吞噬了近3000万人的生命。

艾滋病的医学全名为“获得性免疫缺损综合症”，英文简称AIDS，它是由艾滋病毒（医学全名为“人体免疫缺损病毒”，英文简称HIV）引起的。这种病毒破坏人的免疫系统，使人体丧失抵抗各种疾病的能力，从而严重危害人的生命。人类免疫系统的CD4细胞在抵御HIV的入侵中起着重要作用，当CD4被HIV感染而裂解时，其数量会急剧减少，HIV将迅速增加，导致AIDS发作。

艾滋病治疗的目的，是尽量减少人体内HIV的数量，同时产生更多的CD4，至少要有效地降低CD4减少的速度，以提高人体免疫能力。

迄今为止人类还没有找到能根治AIDS的疗法，目前的一些AIDS疗法不仅对人体有副作用，而且成本也很高。许多国家和医疗组织都在积极试验、寻找更好的AIDS疗法。

1.2 问题的提出

现在得到了美国艾滋病医疗试验机构ACTG公布的两组数据。ACTG320（见附件1）是同时服用zidovudine（齐多夫定），lamivudine（拉美夫定）和indinavir（茚地那韦）3种药物的300多名病人每隔几周测试的CD4和HIV的浓度（每毫升血液里的数量）。193A（见附件2）是将1300多名病人随机地分为4组，每组按下述4种疗法中的一种服药，大约每隔8周测试的CD4浓度（这组数据缺HIV浓度，它的测试成本很高）。4种疗法的日用药分别为：600mg zidovudine或400mg didanosine（去羟基苷），这两种药按月轮换使用；600 mg zidovudine加2.25 mg zalcitabine（扎西他滨）；600 mg zidovudine加400 mg didanosine；600 mg zidovudine加400 mg didanosine，再加400 mg nevirapine（奈韦拉平）。

请你完成以下问题：

1. 利用附件1的数据，预测继续治疗的效果，或者确定最佳治疗终止时间（继续治疗指在测试终止后继续服药，如果认为继续服药效果不好，则可选择提前终止治疗）。

2. 利用附件2的数据，评价4种疗法的优劣（仅以CD4为标准），并对较优的疗法预测继续治疗的效果，或者确定最佳治疗终止时间。

3. 艾滋病药品的主要供给商对不发达国家提供的药品价格如下：600mg zidovudine 1.60美元，400mg didanosine 0.85美元，2.25 mg zalcitabine 1.85美元，400 mg nevirapine 1.20美元。如果病人需要考虑4种疗法的费用，对(2)中的评价和预测（或者提前终止）有什么改变。

2 基本假设

1. 假设CD4细胞数量的变化仅由HIV数量变化决定，排除病人在治疗期间其他因素对CD4数量的影响；

2. 假设病人在ACTG试验之前没有进行相关药物治疗，排除部分病人原来服用药物在此开始阶段产生抗药性的影响；

3. 问题一中不考虑年龄、性别、种族和血型等对试验数据的影响；

4. 假设ACTG采用病人依从性、随机双盲试验，排除心理因素和人为因素对治疗的影响；

5. 假设在回归模型中，CD4和V_load的量是个时间序列；

3 符号说明

符　号	符号说明
y	CD4细胞的数量
y_0	CD4在第0周时的值
t	时间
x_0	HIV在第0周时的值
ξ	残差
a	置信水平
$\beta=[\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6\beta_7\beta_8\beta_9]$	回归系数
$g(i,b,t)$	对接受第i种疗法的第b号病人在t时间所打的分数
K	增加单位（$\log(CD4+1)$）CD4细胞所花的治疗费用

4 问题分析

4.1 HIV药物疗效评价方法简述

HIV药物疗效主要从病毒学指标、免疫学指标和临床症状三个方面进行评估。根据鸡尾酒疗法(HARRT)，病毒学指标是大多数患者治疗后血浆中HIV-RNA的水平4周内应下降1个log以上，在治疗后的3-6个月，病毒载量即可达到血清学检测不到的水平；免疫学指标要求患者经过HAART治疗3个月后，CD4细胞计数与治疗前相比增加了30%即提示治疗有效，或在治疗第一年后CD4细胞计数增长100个/mm^3，提示治疗有效；临床症状是当治疗有效时，临床症状能够缓解，机会性感染的发病率和艾滋病的死亡率可以大大降低。目前，几乎所有发达国家都采用病毒载量(V-load)和CD4+T细胞计数来评估HIV药物临床试验效果，由于该方法可靠性好，能较好反映HIV病因机理，所以该评价方法得到广泛应用。

根据题中给出的对患者进行治疗的三种药物，查找相关药物资料可知，这实际上是鸡尾酒疗法，因此本文使用CD4细胞计数和病毒载量这两项指标来评估该药物的疗效。

4.2 最佳治疗终止时间标准

由于患者在长时间连续服药情况下，HIV病毒对该药物可能产生了抗药性，所以在治疗后期，患者的CD4细胞浓度会减少，病毒载量会重新增加的现象，因此患者就需要停止使用这种药物，或者换用其它抗艾药物。所以本文定出最佳治疗终止时间的标准为：CD4细胞浓度达到峰值后，如果CD4细胞数量又减少了20个/μl或log(CD4+1)的值减少了0.05，则认为可以中止用药，此时对应的时间为最佳中止治疗时间。

4.3 本问题的分析

第一问首先要对试验数据进行预处理，筛除出不合理的数据，然后对剩下的数据用聚类的方法按CD4初值不同的试验对象进行归类，根据每一类的数据，观察发现CD4细胞的初始浓度、HIV病毒初始载量及时间在患者连续服药的情况下对CD4细胞浓度的影响存在一定的统计规律，所以本文就这些影响因素建立了完全二次多项式统计回归模型，用MATLAB求解系数，然后对模型进行R2、F和p检验，通过检验后应用该模型对药物的治疗效果进行评价，再对药物有效时的继续治疗效果进行预测或者对服用药物效果不好的情况确定最佳终止时间。

第二问首先按不同的疗法进行分类，然后用九分制评分法建立疗效评价模型，根据打分的高低，判定疗法的优劣，分数最高的疗法为最优疗法；由于附件二的数据给出了试验者的疗法代码和测试时间，分别按疗法代码分组，然后再对最优疗法所对应的患者继续治疗效果进行预测或确定最佳终止时间。

第三问可看作是在第二问的基础上的考虑经济性的问题。由问题二提供的各种药物的价格得到单位时间内4种疗法各自所花的费用，引入指数K，表示增加单位(log(CD4+1))CD4细胞所花的治疗费用，然后对4种疗法分别计算指数K的值，K越小表示综合评价水平越高，最小的K值对应的疗法为最优疗法，然后针对这种疗法的按问题二的模式进行疗效评价和预测。

5　模型的建立与求解

5.1 问题一的求解

5.1.1 数据预处理

附件一给出的是试验原始数据，没有进行过任何处理，所以要对该序列数据进行处理，本文依模型假设对数据进行处理，去除不合理的或有明显偏差的数据。

对附件一中的原始数据进行以下处理：

1.若某病人CD4或Vload值在第0周没有数据记录的,将该病例数据去除；

2.若某病人CD4或Vload值中0值,,将该病例数据去除。

3.若某病人CD4值在某一时刻为0,则剔除该时刻的CD4值与Vload值。

依相关资料，ACTG按照患者CD4细胞的初始数量对患者患病的轻重程度进行分类，本文认为附件一提供的数据为所有AIDS患者中的300多个样本，具有一定的代表性，能够反映整体统计

寺性，所以首先按CD4细胞数量初始值大小由20～300分为15个段，统计每段的人数，如下表1:

表1

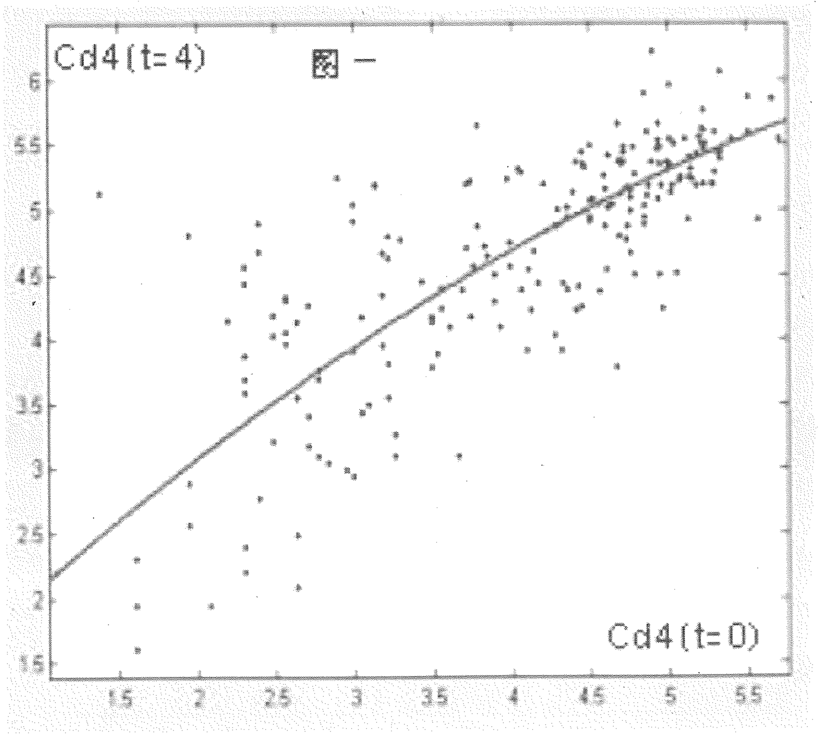
CD4	〈20	20~40	40~60	60~80	80~100	100~120	120~140	140~160
人数	71	37	31	32	29	26	24	19
CD4	160～180	180~200	200~220	220~240	240~260	260~280	280~300	
人数	16	7	5	3	1	1	2	

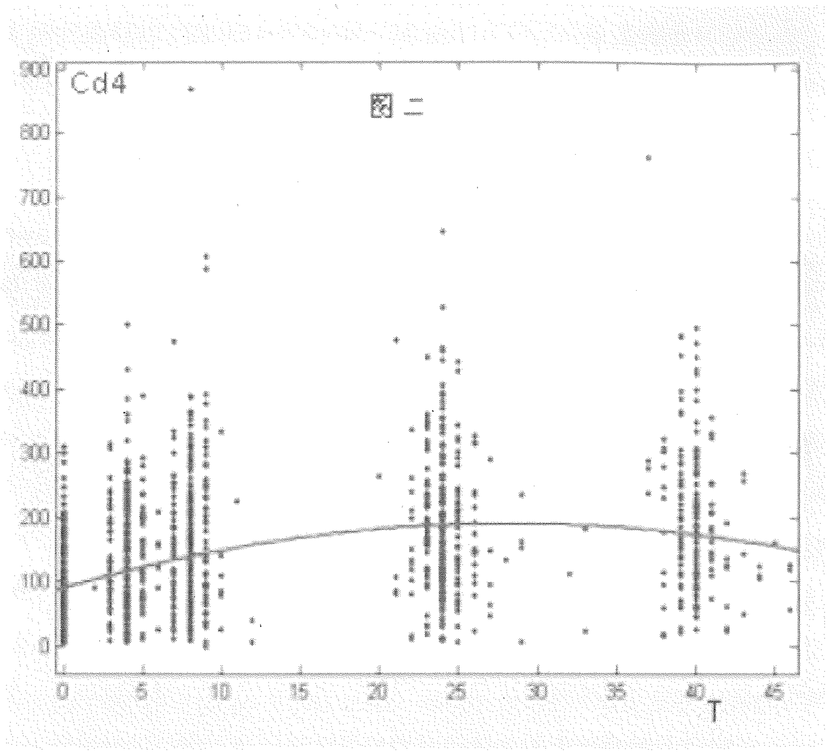
依表1，按聚类的思想，按患者CD4细胞的初始量分为3类，为重度患者(CD4<40)，中度患者(40<CD4<100)和早期患者(CD4>100)，各段所占人数比例分别为36%，30%和34%。

5.1.2 疗效评价预测统计回归模型

1. CD4细胞计数指标

为了大致分析第t周CD4细胞的数量y与CD4细胞的初始数量之间的关系，利用附件一的随机抽样数据作y对的散点图见图1；为了分析CD4细胞的数量y与时间t之间的关系，也可以用抽样数据作y对t的散点图见图2；





由图 1 可以看出，随着的增加，y 的值有比较明显的增长趋势，图 1 的曲线是用线性模型

$$y = \beta_0 + \beta_1 y_0 + \varepsilon \qquad (1)$$

拟合的（其中 ε 是随机误差）；而在图 2 中，当增大时，y 的值有向上弯曲的增长趋势，图中曲线用二次函数模型:

$$y=\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon \qquad (2)$$

拟合的。

同时，由于 CD4 被 HIV 感染而裂解，其数量将急剧下降，而 HIV 将迅速增加，因此 CD4 的数量与HIV的数量也有一定的关系，HIV的数量与HIV的初始值和时间t有关，所以可以建立以下模型

$$y=\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x_0} + \beta_2 \frac{1}{x_0^2} + \beta_3 \frac{t}{x_0} + \beta_4 \frac{y_0}{x_0} + \varepsilon \qquad (3)$$

其中，为 HIV 的初始值。

综合上面的分析，结合上述三个模型建立如下预测统计回归模型，

$$y=\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 y_0 + \beta_3 {y_0}^2 + \beta_4 t^2 + \beta_5 t y_0 + \beta_6 \frac{1}{x_0} + \beta_7 \frac{1}{{x_0}^2} + \beta_8 \frac{y_0}{x_0} + \beta_9 \frac{t}{x_0} + \varepsilon \qquad (4$$

其中，y 为 CD4 的试验值，为 CD4 在第 0 周时的值，为 HIV 的初始值，t 为时间，$\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6,\beta_7,\beta_8,\beta_9$ 为回归系数，如果模型参数选择得合适，ε 应大致服从均值为零的正态分布。

2. 病毒载量(V-load)指标

对 HIV 数量也可以建立一个与 CD4 细胞计数指标相同的模型，见(4)式，只是此时的因变量 y 为 V-load 的试验值，为 CD4 的初始值，自变量为 V-load 在第 0 周时的值，t 为时间，$\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6,\beta_7,\beta_8,\beta_9$ 为回归系数。

5.1.3 模型的求解

5.1.3.1.1 初始 CD4<40 时

首先对重度患者(CD4<40)的数据进行残差分析，直接使用 MATLAB 工具箱中的命令 regress 进行求解，在置信水平 $\alpha=0.05$ 的条件下，得到预测统计回归模型中的对应的回归系数 $\beta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6,\beta_7,\beta_8,\beta_9)$ 的值及置信区间，检验的统计量的结果如表 2，残差结果如图 3。

表 2（$\alpha=0.05$）

参数	参数估计值	置信区间
β_0	243.5	[32.000002 455.000013]
β_1	5	[2.000000 8.000000]
β_2	10.9	[6.000000 15.000000]
β_3	−0.1	[0.000000 0.000000]
β_4	−0.1	[0.000000 0.000000]
β_5	0	[0.000000 0.000000]
β_6	−2762.6	[-4467.999935 -1057.000041]
β_7	7318.2	[4007.999897 10628.000259]
β_8	−32.4	[-52.999999 -11.000000]
β_9	−0.9	[-15.000000 13.000000]
$R^2=0.4$	$F=28$	$P=0$

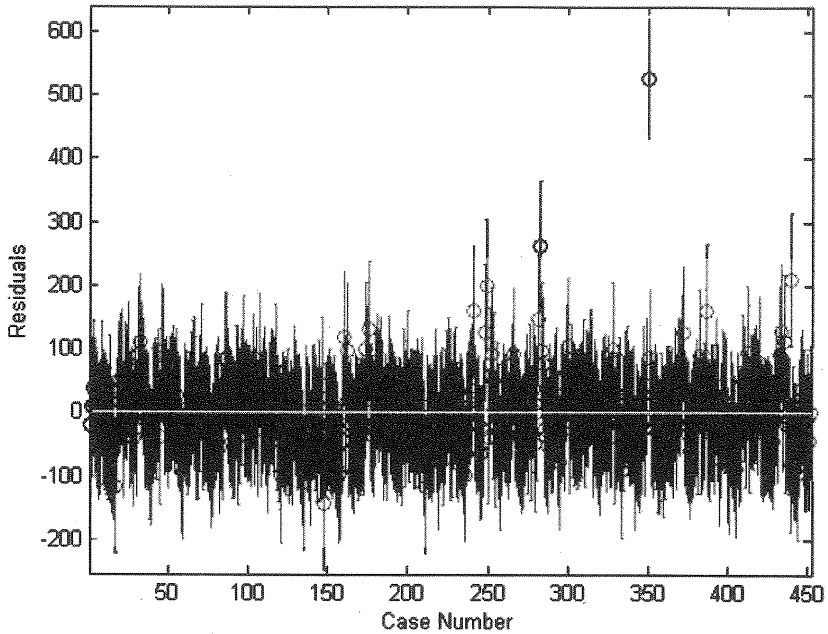


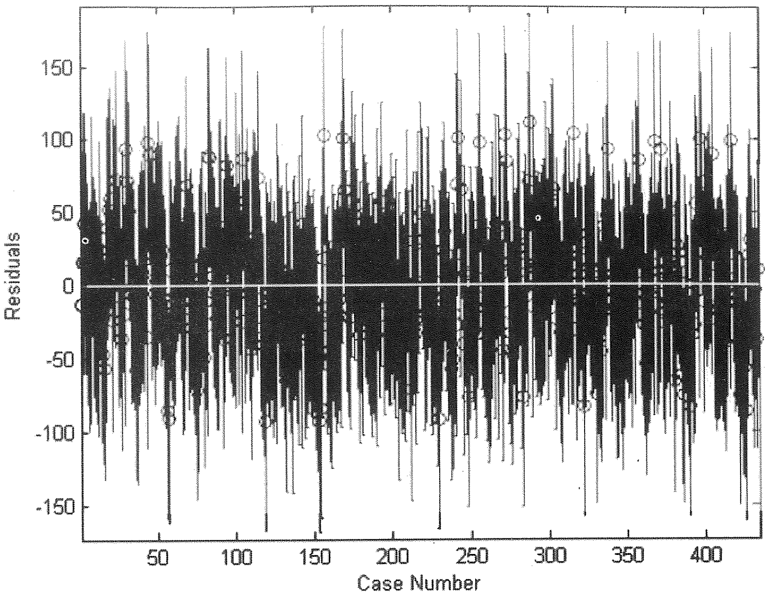
图3 Residual Case Order Plot

由表2可以看出，检验统计量R2较小，由图3可以看出，残差ε大致服从均值为零的正态分布，部分点距偏离均值较远，所以可以对这些数据予以剔除，剔除后再对剩余数据进行二次残差分析，回归系数的值及置信区间检验的统计量的结果如表3，残差结果如图4。

表3（α =0.05）

参数	参数估计值	置信区间
β_0	246.1	[9.500000 39.700001]
β_1	6	[0.400000 0.800000]
β_2	11.3	[0.800000 1.400000]
β_3	−0.1	[0.000000 0.000000]
β_4	−0.1	[0.000000 0.000000]
β_5	0	[0.000000 0.000000]
β_6	−2926.8	[-414.400011 -171.000004]
β_7	7922.8	[555.899978 1028.599977]
β_8	−35.1	[-5.000000 -2.000000]
β_9	−4.7	[-1.400000 0.500000]
R^2=0.5	F=52.8	P=0

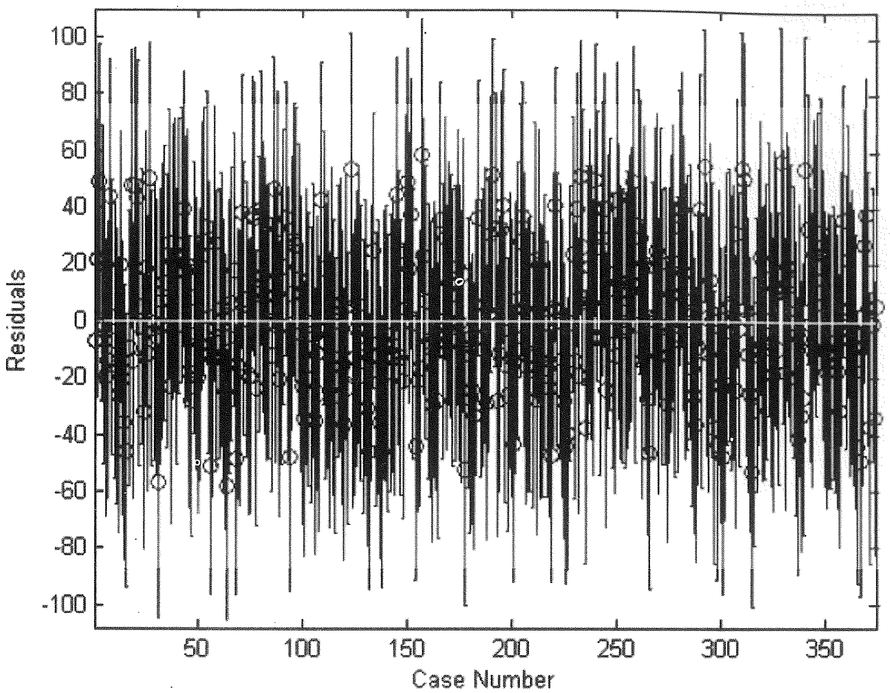
图4 Residual Case Order Plot



根据表3和图4可以看出，仍然有部分点距偏离均值较大，还需要对这些数据予以剔除，对剩余数据再次进行残差分析，经过多次计算，计算过程中的结论见附表1，附图1，最终得到残差比较集中，基本服从均值为零的正态分布，满意度较高的结果如表4和图5，此时检验统计量R2较大，且都通过了α =0.05时的检验，因此，可以确定该CD4细胞数量的统计回归模型满足模型检验，可以用于预测药物对CD4细胞数量随时间变化的效果。

表4 CD4细胞数量统计模型回归系数计算结果(α =0.05)

参数	参数估计值	置信区间
β_0	248.1	[146.100000　350.199997]
β_1	5.7	[4.100000　7.200000]
β_2	8.7	[6.500000　10.900000]
β_3	0	[-0.100000　0.000000]
β_4	−0.1	[-0.100000　0.000000]
β_5	0	[0.000000　0.000000]
β_6	−2837.8	[-3661.200047　-2014.400005]
β_7	7634.7	[6034.800053　-19.400001]
β_8	−29.5	[-11.000000　2.500000]
β_9	−4.3	[-11.000000　2.500000]
R^2=0.7278　F=109.5536　P=0		



用上述同样的方法，也可以得到病毒载量(V-load)模型中的回归系数估计值及置信区间检验的统计量,结果见表 5。

表 5 病毒载量（V-load)模型回归系数计算结果（α =0.1)

参数	参数估计值	置信区间
β_0	2.6996	[-1.6166 7.0157]
β_1	−0.2818	[-0.3314 -0.2321]
β_2	0.1117	[-1.6134 1.8368]
β_3	0.0603	[-0.1125 0.2330]
β_4	0.0055	[0.0051 0.0059]
β_5	0.0043	[-0.0049 0.0135]
β_6	−14.9142	[-24.3650 -5.4634]
β_7	7.6757	[-1.8401 17.1915]
β_8	2.7465	[0.9511 4.5418]
β_9	−0.0557	[-0.1286 0.0171]
R^2=0.7467 F=133.0117 P=0		

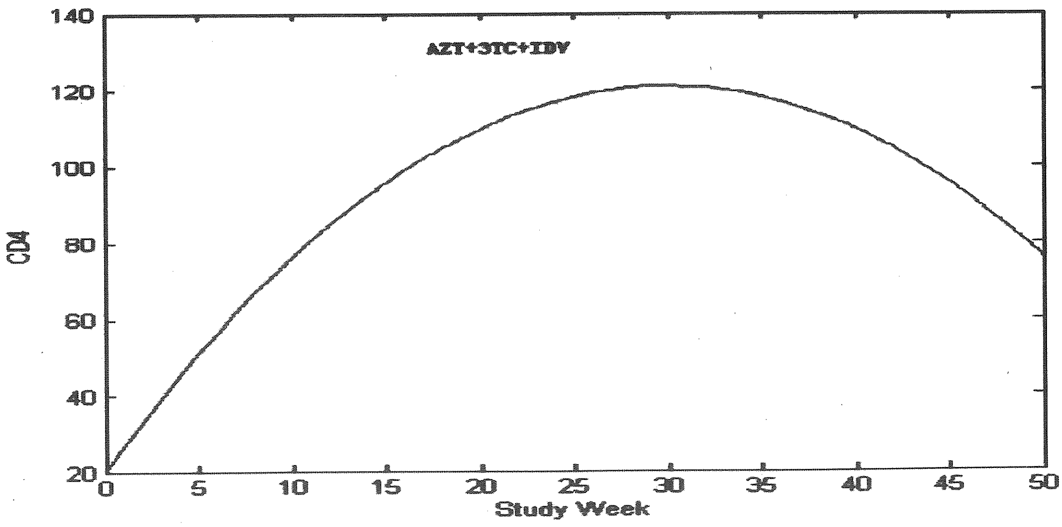
由表5可以看出，该模型的各检验统计量均满足0.1 α =时的检验水平，所以认为该模型可以用于预测药物对V-load随时间变化的效果。

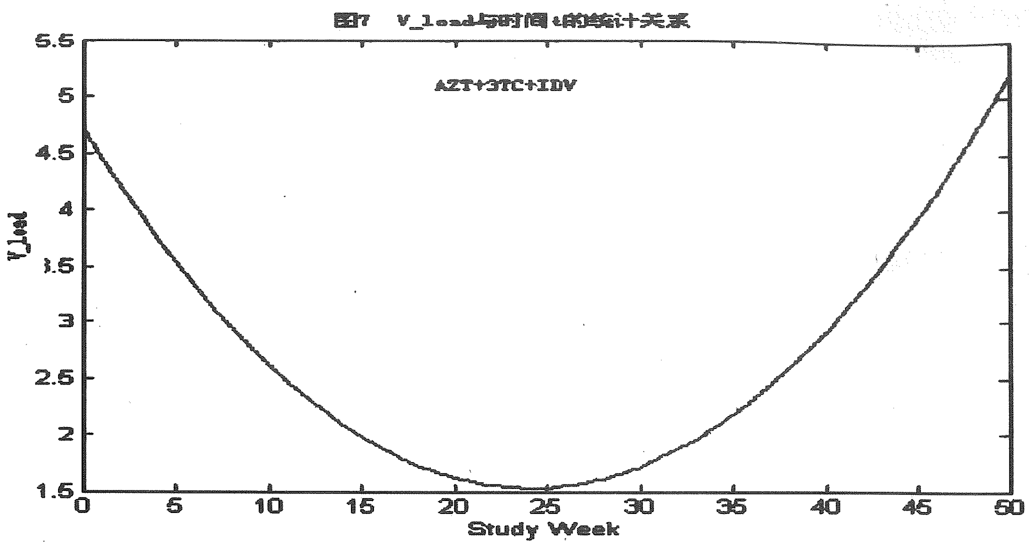
5.1.3.1.2.初始CD<40的结论及分析

由上述计算和分析，在其他两个变量取均值的情况下，得到CD4数量与时间的变化关系曲线如图6，V_load与时间的变化关系曲线如图7，由两图可知，患者服用该药后CD4细胞数量在前0周左右一直上升，达到峰值后CD4细胞数量开始减少，V-load在0～25周数量减少，说明药物作用比较明显，在25周以后V-load又开始增加，根据两图比较，可以分析CD4细胞数量出现峰值时间与V-load谷值时间不对应问题。本文认为，V-load数量出现谷值时间比CD4细胞数量出现峰值时间早，说明药物对HIV病毒有抑制作用，刚开始服药时，药效病毒数量多，所以相同剂量的药物抑制HIV数量就明显多，所以病毒数量急剧减少，CD4数量开始增多，随着病毒数量的减少，药物与HIV病毒结合的机会减少，所以查杀HIV病毒的数量也减少，因此HIV病毒数量减少的速率开始减小，直至在人体内出现HIV数量的动态平衡，但随后，可能由于抗药性的影响，所以HIV病毒又有增加的趋势，而此时由于CD4细胞的自身免疫功能和细胞的复制，所以CD4细胞的数量不会减少，只是增加的数量越来越少，当HIV破坏CD4细胞的生长能力达到一定值的时候，CD4细胞数量达到最多，随后，CD4细胞数量开始减少。

因此，本文认为，用该药物连续治疗25周后能减少V-load，并增加初始CD4<40的重度患者的CD4细胞数量，说明药物此时疗效显著；25周过后，药物仍有疗效，但疗效显著性降低，如果CD4细胞数量又减少了20个/μ1，则认为可以中止用药，此时对应的可以认为是最佳中止治疗时间，即初始CD4<40的患者最佳治疗中止时间为连续服用该药40周左右。

图6 CD4与时间t统计关系



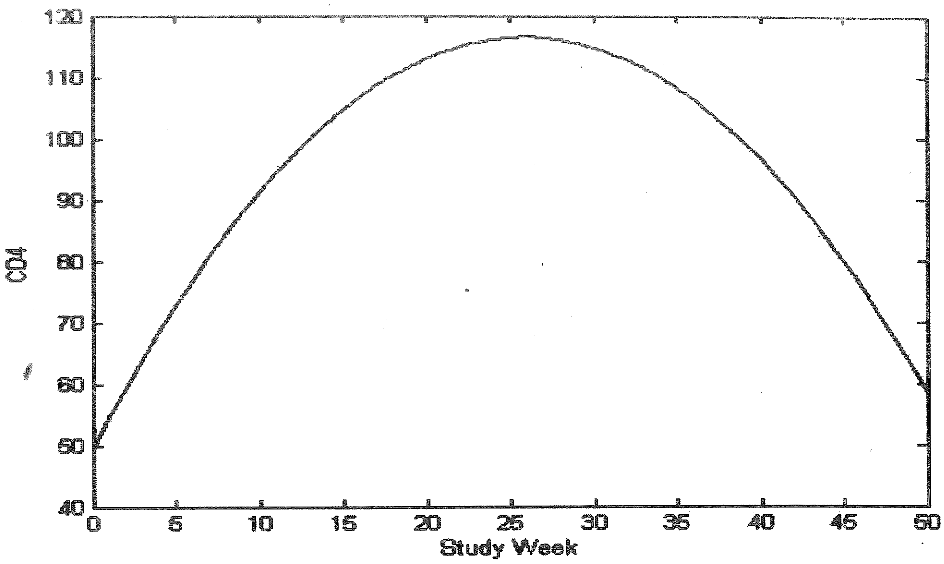


按照处理CD4<40的方法，用统计回归模型，经逐步回归，逐个剔除残差较大的数据，求出的回归系数见表6，使建立的模型满足一定置信水平下的各项统计量检验标准，得到CD4数量与时间的变化关系曲线如图8。

表6

参数	参数估计值	置信区间
β_0	269.7	[-16.000001 555.000007]
β_1	17	[14.000000 20.000000]
β_2	1	[-1.000000 3.000000]
β_3	0	[0.000000 0.000000]
β_4	−0.1	[0.000000 0.000000]
β_5	0	[0.000000 0.000000]
β_6	−2315.1	[-4820.000172 189.99998]
β_7	5526.9	[-298.999995 11352.000237]
β_8	−3.3	[-13.000000 6.000000]
β_9	−53.2	[-67.000002 -39.999999]
$R^2=0.728$ F=90.6862 P=0		

图8 CD4浓度与时间t的统计关系



5.1.3.2.2. 初始 40<CD4<100 结论

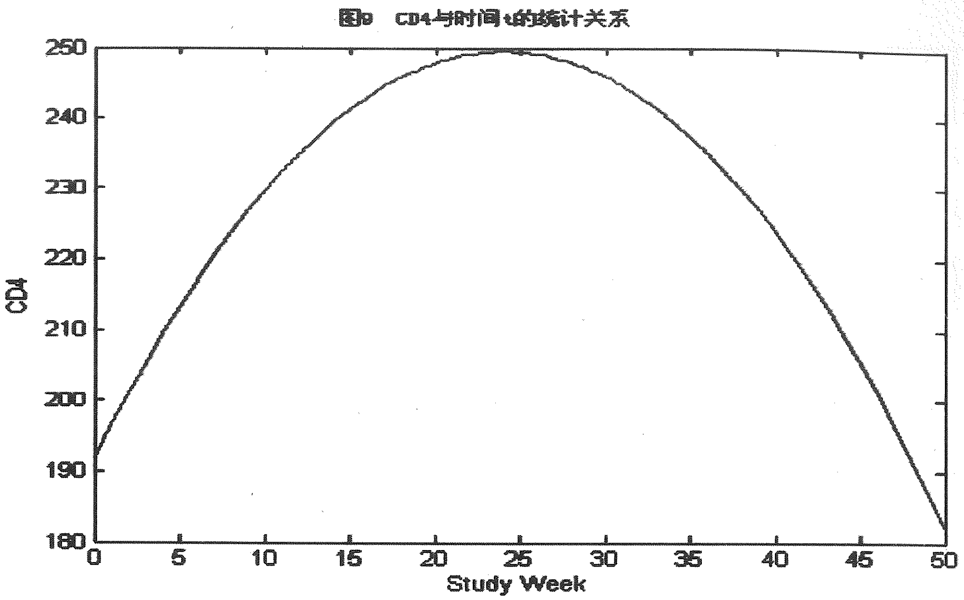
由图 8 可知，按照问题的分析中对最佳停药终止时间的标准，可以认为在初始CD4细胞数量介于 40 到 100 之间的患者的最佳终止时间为连续服药 38 周左右。

5.1.3.3. 初始 CD4>100 时结论与分析

用上述相同的方法，相同的模型，通过逐步回归，解出回归系数，求出满足一定置信水平下各项统计量的检验标准，结果见表 7，得到 CD4 数量与时间的变化关系曲线如图 9。

表 7 CD4 细胞数量统计模型回归系数计算结果（α =0.05）

参数	参数估计值	置信区间
β_0	146	[-28.400000　320.499986]
β_1	8.9	[6.400000　11.400000]
β_2	1.1	[0.200000　2.000000]
β_3	0	[0.000000　0.000000]
β_4	−0.1	[-0.100000　-0.100000]
β_5	0	[0.000000　0.000000]
β_6	−1045	[-2185.40009　95.399998]
β_7	952.7	[-950.299978　2855.600119]
β_8	2.2	[-0.900000　5.400000]
β_9	−16.4	[-26.500000　-6.200000]
$R^2=0.7$　F=89.2　P=0		



由图9，按最佳停药终止时间的判定标准，可以认为在初始CD4细胞数量大于100的患者的最佳终止时间为连续服药35周左右。

5.2 问题2的求解

5.2.1 数据的预处理

对附件二中的原始数据进行以下处理：

1.若某病人CD4值在第0周没有数据记录的,将该病例数据去除；

2.若某病人CD4值中0值,,将该病例数据去除。

表8

	疗法\年龄	〈= 44	45~59	〉=60	合计
年龄分布人数	1	228	49	4	281
	2	217	63	3	283
	3	231	48	2	281
	4	233	60	4	297
年龄分布人数百分比	1	0.811388	0.174377	0.014235	1
	2	0.766784	0.222615	0.010601	1
	3	0.777778	0.161616	0.006734	1
	4	0.784512	0.20202	0.013468	1

由以表8可知，在接受治疗的对象中青年人占的比例很大,中年人占的比例稍小,老年人几乎可以忽略不计，所以我们可以认为年龄对我们的疗效影响很小,可以忽略不计。

5.2.2 九分制打分模型

因为艾滋病治疗的目的是尽量减少人体内 HIV 的数量，同时产生更多的 CD4,至少要有效的降低 CD4 减少的速度。题中数据仅有 CD4 浓度的量,没有 HIV 的数值,所以我们仅以 CD4 为标准作为评价 4 种疗法的指标，1300 多名病人是随机地分为 4 组,可以认为 4 种疗法的对象是一致的，对每一种疗法,通过观察数据可知，所有病人的 CD4 观测时间都在 8 周的整数倍周围波动，因此,我们可以将观测时间与 8 的 N 倍接近的数据整合到 8 的 N 倍周这一类中，所以在对这 4 种疗效评价时可以仅对第 8,16,24,32,40 周的 CD4 浓度量进行分析评价。

本文借鉴了 9 分制评分法，设给接受第 i 种疗法治疗的第 b 号病人在第 t 周的治疗效果打分值为 g(i，b,t),对以下原则进行打分：

1.当第 b 号病人接受第 i 种疗法在第 t 周的一阶偏导数 $f'(i,b,t)>0$ 时,可知第 i 种疗法使得 CD4 的数量增加,疗效显著，给这类病例的打分在 1-9 之间；

2.当 $f'(i,b,t)>0$ 时,可知第 i 种疗法使得 CD4 的数量减少,此时考虑二阶导数 $f''(i,b,t)$,当 $f''(i,b,t)<0$ 时，CD4 的数量增加的速度降低，此时认为该种疗法对病人有疗效但疗效不显著，给这类病例的打分在 0-1 之间；

3.对于不属于以上两种情况的,打分为 0,即这种疗法对其无改善作用.

具体打分步骤如下:

step1：用数值差分近似代替微分别求出第 i 种疗法第 b 号病人 CD4 值在观测时间 t=8,16,24,32,40 周时的对时间一阶的偏导数 $f'(i,b,t)$ 与二阶偏导数 $f''(i,b,t)$；

step2：由第一步结果我们可以求得在第 8 N 周时的 $f'(i,b,t)>0$ 这类里面的最大 $\max f'(i,b,t)$ 与最小 $\min f'(i,b,t)$,对于 $f'(i,b,t)<0$ 而 $f''(i,b,t)<0$ 同理也可以得到最大的 $\max f''(i,b,t)$ 与 $\min f''(i,b,t)$;

step3：对以上两组最小与最大导数间等分 9 份。对于 $f'(i,b,t)$ 的 9 等分依次打分为:1,2,3…9。对于 $f''(i,b,t)$ 的 9 等分依次打分 1/9,1/8,1/7…1。

根据上述分析，考虑到同一段内不同的 $f'(i,b,t)$, $f''(i,b,t)$ 所对应的打分有所差别,建立以下 9 分制打分模型：

$$MaxG(i,t)=\sum_{b(i)} g(i,b,t) \tag{5}$$

$$g(i,b,t)=\frac{f'(i,b,t)-\min f'(i,b,t)}{\max f'(i,b,t)-\min f'(i,b,t)}*9+1 \qquad f'(i,b,t)>0 \tag{6}$$

$$g(i,b,t)=\frac{f''(i,b,t)-\min f''(i,b,t)}{\max f''(i,b,t)-\min f''(i,b,t)}*\frac{9}{10} \qquad f'(i,b,t)<0\text{且}f''(i,b,t)<0 \tag{7}$$

$$g(i,b,t)=0 \qquad \text{其他情况} \tag{8}$$

5.2.3 模型的求解

通过 MATLAB 与 EXLCE 编程计算得到以下结论，见表 9。

表 9

疗法时间	第 8 周	第 16 周	第 24 周	第 32 周	第 40 周	均值
1	2.3310	1.9645	2.1084	2.3335	3.1883	2.3881
2	2.6676	1.8166	1.9585	2.5780	3.2347	2.4511
3	2.8507	2.0876	2.0839	2.3646	3.7138	2.6201
4	3.2789	2.1457	3.8305	2.1054	2.4819	2.7658
最高得分	3.2789	2.1457	3.8305	2.3646	3.7138	2.7658
该周最高得分疗法	4	4	4	3	3	4

根据表 7 可知，第 1、2 种疗法的得分相对第 3、4 种疗法的得分少,疗效相对较差；第 3 种疗法的得分整体趋势比较缓,慢慢的升高,在第 40 周时到达最大值,在第 32、40 周时这种疗法在 4 种疗法中得分最高；第 4 种疗法的得分波动比较大,在第 24 周时达到最大值，并且在第 8,16,24 周时这种疗法在 4 种疗法中得分最高, 均值也高于第 3 种疗法，所以本文认为从总体上看第 4 种疗法的疗效较好。

5.2.4 问题的结论

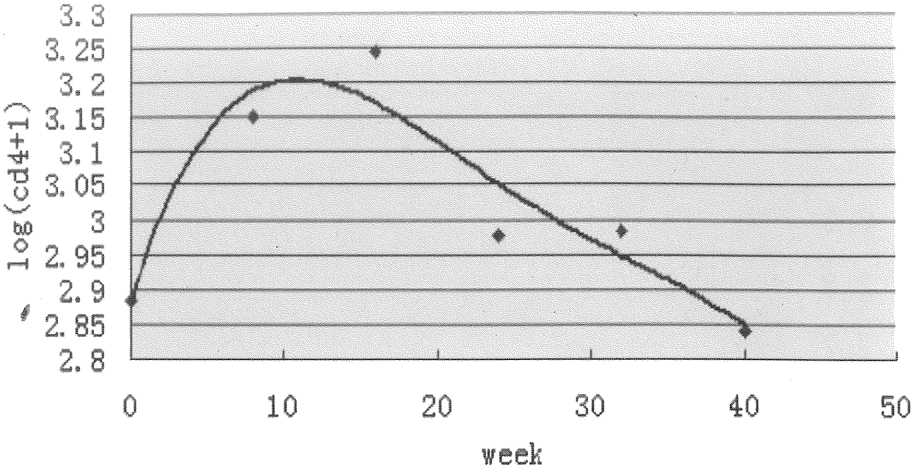
由于数据的统计规律不好，所以建立的一维线性回归模型不能满足置信水平下的检验，而且相关性很差，所以本文对数据进行以下处理：

1. 把测试时间与 8 的 N 倍接近的数据时间当成到 8 周的 N 倍；

2. 将每个测试时间对应的所有数据取均值；

根据上述数据的处理，可以描绘到图 10 上，按照最佳终止时间判定方案，可以认为最佳停止用药时间为 15 周左右；

图10



5.3 问题 3 的求解

这一问实际上是对问题二的拓展，把经济因素考虑进来。由问题二提供的各种药物的价格得到单位时间内 4 种疗法各自所花的费用单位时间的平均费用依次为：1.225 美元、3.45 美元、2.45 美元、3.65 美元；由问题二的结论可知，4 种疗法的平均得分依次为：2.38，2.45，2.62，2.77。由于各种疗法的得分差别不大，而各种疗法的单位时间的费用相差很大，有的成倍数关系，所以不适宜直接用得分与费用的比值对各方案的综合水平进行评价。

鉴于此，本文定义一个指数 K，表示增加单位(log（*CD4*+1))CD4 细胞所花的费用，因此，得到各个疗法所对应的初始 log（*CD4*+1）和最大 log(cd4+1)及其所对应的时间 t(i)。在 t(i)时段内患者所需支付的费用为最大log(cd4+1)所对应的时间t(i)与每种疗法的每周单价之积，t(i)时刻所增加的所有的 log(cd4+1)数量为最大 log(cd4+1)与初始时刻的 log(cd4+1)之差，据此可建立以下模型:

$$Min\frac{f}{d}$$

$$f=t(i)\times p(i)$$

$$d=M(i)-\log(CD4(i,0)+1)$$

$$M(i)=\max\{\log(CD4(i,t)+1)\}$$

$$d\neq 0$$

其中，为第 i 类疗法的每周费用，i=1,2,3,4;

通过 EXCEL 编程计算并作出疗法 1,2,3,4 的图，分别如图 11，12，13，14 所示。

图11

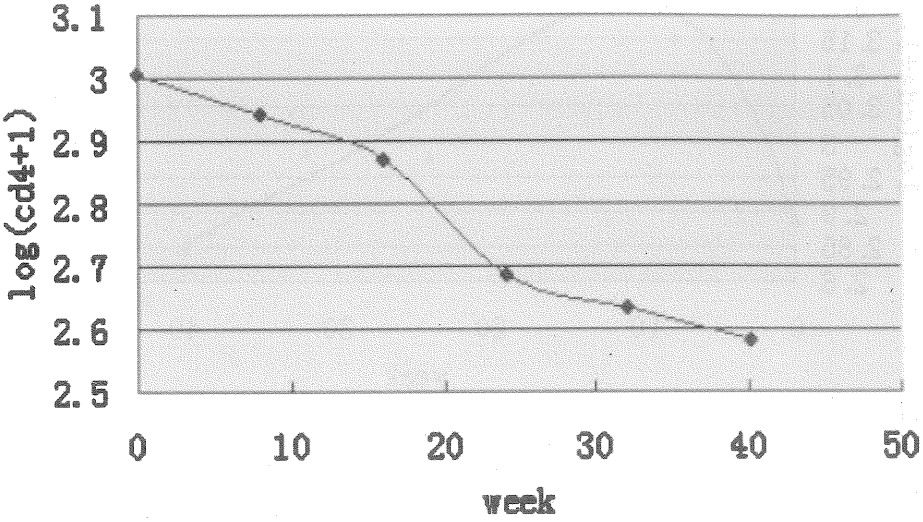

3.1
3
2.9
2.8
2.7
2.6
2.5
log(cd4+1)
0
10
20
30
40
50
week

图1 2

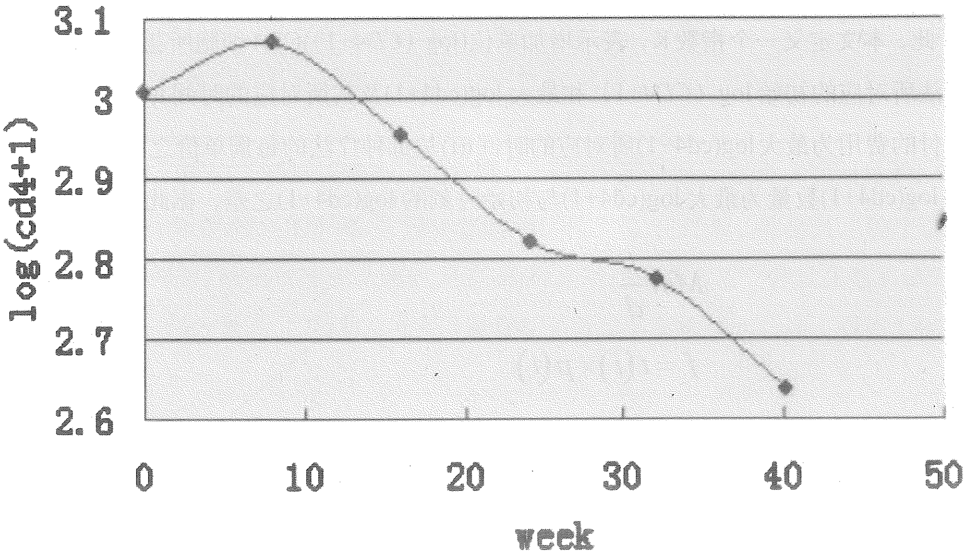

3.1
3
2.9
2.8
2.7
2.6
log(cd4+1)
0
10
20
30
40
50
week

图13

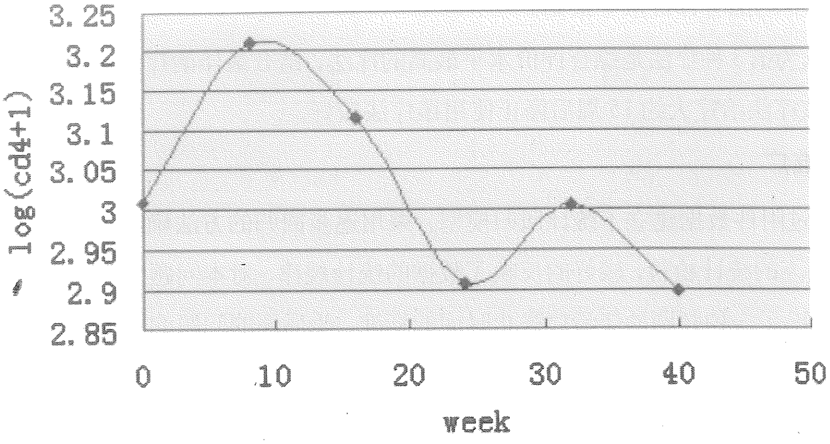
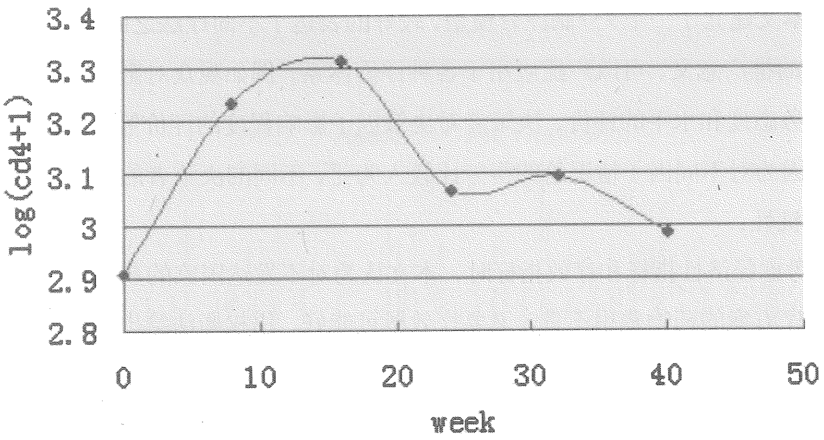


图14



可以得出最终结果如表 10：

表 10

i	t(i)	最大 log(CD4+1)	初始 log(CD4+1)	d	f	f/d
1	0	3	3	0	0	0
2	7.5	3.07	3.008851	0.061149	181.125	60.1974
3	10	3.22	3.0077	0.2123	59.0548	19.63454
4	14	3.32	2.8863	0.4337	357.7	123.9303

从上表中可以看出：疗法1的增加量为0，所以可以认为这种疗法综合评价水平不好，可以排除；再观察第2，3，4种疗法的f/d，即K值，发现疗法3的K值与另外两种疗法相比小很多，所以可以认为疗效3的综合评价水平最高。

于是，本文认为第3种疗法是综合评价水平最高的疗法，结合最佳治疗终止时间标准，由图13可得连续使用该疗法治疗大约15周后停止使用该疗法较好。

6 模型的评价与推广

6.1 问题一通过附件数据建立了统计回归模型，采用逐步回归的方法确定了回归系数，并满足了一定置信水平下的统计检验，较好的反映了数据的统计规律，对本问题的解决提供了很好的办法；同时本文给出了一种判别最佳治疗终止时间的标准，为后面的问题的解决提供了很好的方法；对初始数据用聚类的办法对不同程度的患者进行了分类，并对不同类型的患者服药效果进行了评价，确定了最佳终止治疗时间；但模型也有不足之处，综合考虑CD4初始值、HIV载量初始值和时间三个因素对CD4量的变化规律显得过于复杂，最终确定的参数的统计指标的相关性也不高；由于各点非常离散，所以很难用一个确切的曲线来很好的模拟整体的统计性；

6.2 问题二中本文建立了一个9分制评分模型，较好的表达了不同疗法之间的疗效的优劣性，这个模型具有一定的推广意义，可以广泛应用于各种评价体系，例如观众对影院座位的满意度评价，病人对医生服务态度和水平的评价，决策者对决策因子影响程度的评价等；但这个评分模型也有一定的缺陷，因为对不同因子情况给的得分比较人为化，不同的决策者的打分标准不是一样的，具有一定的随机性；

6.3 问题三中考虑经济性指标和疗效指标时，本文认为对不发达国家的药品供应标准应该是折中模式，即让治疗方案的药物费用不贵，又要疗效尽可能好，用权衡法给出问题的结论，应该是比较合理的；但是如果疗法很多或者经济因素又有制约，那么人为的权衡选择方案显然不现实，应该用多目标规划手段来处理；

参考文献

[1] 姜启源，谢金星，叶俊，数学模型，北京：高等教育出版社，2003。

[2] 何晓群，多元统计分析，北京：中国人民大学出版社，2004。

[3] 刘富金，孙晗笑，中国免疫学杂志，第20卷：510-512，2004年

[4]艾滋病重建临床并发症，http://immuneweb.xxmc.edu.cn/aids/E-JOURNAL/0005.htm,2006,9,15

[5] 老年人划分标准，http://info.med.hc360.com/html/001/005/014/14118.htm,2006,9,17

[6] NTEP 评分法,http://www.grassonline.com.cn/jsfw/sci_show.asp?wzbh=68,2006,9,17

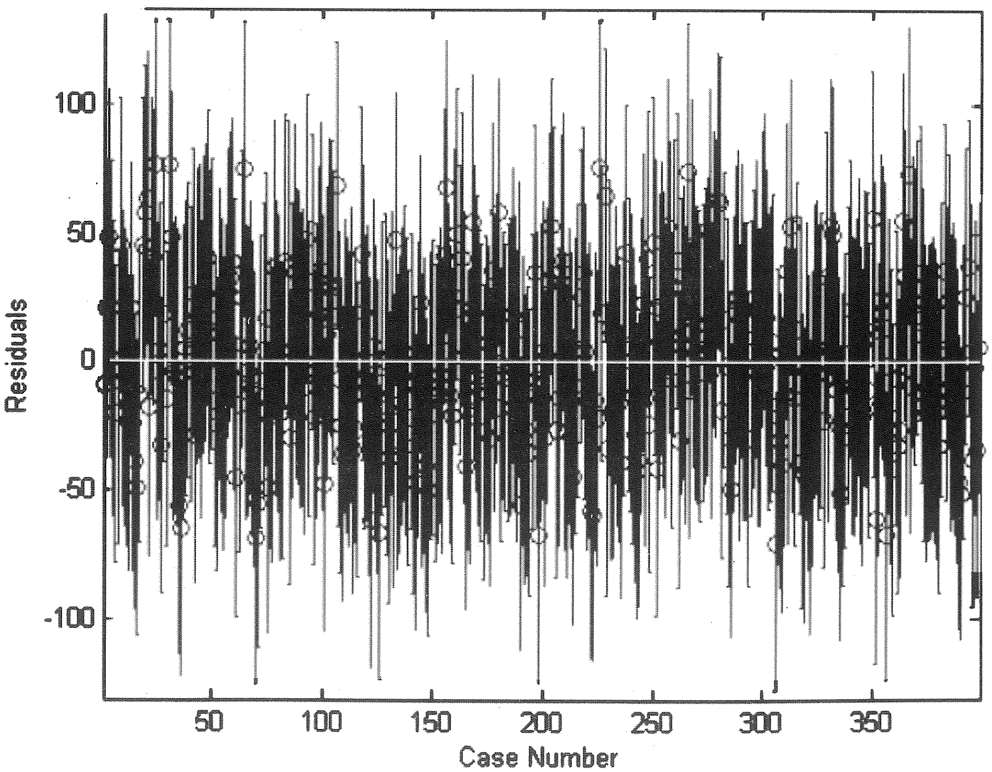
[7] 吴昊，艾滋病诊疗指南,http://hivworkshop.com/haart.htm#haart,2006,9,16

附件：

附表 1 （α = 0.05）

参数	参数估计值	置信区间
β_0	233.4378	[121.283740 345.591873]
β_1	11.27188	[9.203606 13.340158]
β_2	0.181388	[-0.313700 0.676477]
β_3	−0.00056	[-0.001327 0.000200]
β_4	−0.10924	[-0.130910 -0.087567]
β_5	−0.00187	[-0.006260 0.002524]
β_6	−1278.81	[-2172.695398 -384.920567]
β_7	829.0731	[-1033.578791 2691.665173]
β_8	4.522931	[2.272870 6.772992]
β_9	−23.0691	[-32.631513 -13.506600]
R^2=0.6573 F=169.8539 P=0		

附图1 Residual Case Order Plot

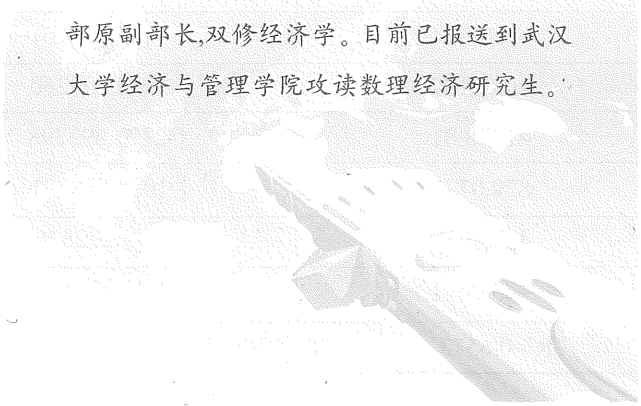


定目标，重计划

——访03基地郑浩同学

05基地 宋娜

03级数学基地班郑浩同学简介：院体育部原副部长,双修经济学。目前已报送到武汉大学经济与管理学院攻读数理经济研究生。



问：能简单介绍下今年基地班保研情况吗?

答：我们班有24位同学接受推免继续攻读研究生，其中有8人保送到外校攻读研究生，2人被推免到了香港，保送到本校的同学中有三人攻读经管院的研究生。我知道的有六位同学准备出国，三位准备去法国，两位已经通过托福和GRE考试准备去美国，一位通过雅思考试准备去英国。(注：去香港的不占学校保研指标)。

问：基地班保研率是比较高的，保研一般都有什么要求?

答：首先保研的同学专业成绩要比较好，专业课成绩占最后总评的80%。一些竞赛如数模竞赛,学习竞赛等还有社会实践活动会有加分，英语必须通过六级。具体的评分标准和每学年年终奖学金评定标准差不多。

问：很多同学都希望能够通过保送攻读研究生，你是如何看待保研的?

答：保研的同学肯定都是比较优秀的，平时花了很多功夫去学习。要用你的成绩和各方面的表现让导师接受你。平时的努力是很重要的，出国需要努力，考研需要努力，保研也需要努力。

问：基地班的同学在出国考研保研的准备中应该注意哪些问题呢?

答：大家要把方向看准，明白自己将来想要学什么，想要成为什么样的人；大目标定模糊，计划赶不上变化；小目标定细致，凡事预则立。比如你们现在要过六级，根据时间给自己制定一些可行的计划，每天背多少单词，哪些时间段可以用来做阅读、听力等等。机会总是留给那些有准备的人，你们现在就应该做好眼前的事，上课做好笔记，认真完成作业。大方向看准，一步一步的来，不用想得太远,但每学期一定要有所收获。

问：你修了双学位然后跨专业保研，那你是如何协调专业课学习和双学位学习的?

答：双学位学习和数学学习还是有轻重

之分的，专业课的学习肯定是比双学位重要。数学专业课的学习要下很大的功夫，一定要保证数学专业课的学习时间,大家可以把双学位学习当做拓展自己知识面的机会，修了双学位的同学一定不要本末倒置。

同时，大家也不能忽视了英语的学习，在现在的社会环境下，英语是非常重要的。学会利用好闲散的时间来学习英语，如果每天拿不出整块整块的时间去学习，用英语学习去填充其他的学习时间。这是个厚积薄发的过程,需要平时功夫,得靠一点一滴的积累。

问：双学位学习毕竟在时间和态度上与本专业学习是不一样的，应该如何正确对待双学位学习呢？

答：每个人的学习观是不一样的，如果准备通过选修双学位达到能做深层研究的地步才算是学到东西,那仅靠周末双学位学习肯定是学不到这种程度了。重要的是如何去掌握一门学科的核心内容，熟悉它的整体框架，对整个系统有概念认识和最基本的掌握，以后遇到这方面的问题时不至于太陌生，再要用到这方面的知识时知道该从哪些方面获得所需要的东西。想学到什么程度也是因人而异的，总之还是拓宽自己的知识面。牺牲双休日的时间去学习是需要很大毅力的，付出的多收获也就多了。心态很重要。

问：平时有什么兴趣爱好？忙碌的学习生活中怎么协调学与玩的问题呢？

答：学会忙里偷闲呗。我很喜欢踢足球、打网球，有时上完课会很累，但有机会还是会去和同学们踢踢球，心里还是很爽的。踢足球有时不太方便就一两个人去打网球。兴趣爱好可以让你在烦闷，疲惫的时候放松自己，可以让人保持一个积极健康的心态。事在人为，总是可以挤出一部分时间玩一玩，放松自己，这也是很重要的，毕竟生活是自己的，快乐是自己的。还是那句话吧，心态很重要。

访

03基地李俊睿同学

04基地 缪爽 李小山

我们在湖滨食堂采访了李俊睿学长，他被免试推荐到中科院上海分院读生物数学。初次见面感觉他为人随和，很善言谈。我们的采访在轻松的聊天气氛中开始。

问：你读的是什么专业?这个专业主要研究什么?当初是怎么决定读这个专业?

答：我读的是生物数学，其实我对这个专业不太了解。当时在网上查了一下这个专业，它里面有很多东西和数学有关，然后我考虑到自己修过生科院的课，对生物也有一定兴趣,所以就决定读这个专业了。

问：这个专业应该算是应用数学吧。我们有很多同学以后也想读应用。你觉得应该如何克服专业上的差异所带来的困难呢?

答：我觉得应该尽早准备。比如我在大一大二的时候就选修了生科院的一些课，而且还修了计算机的双学位。所以我觉得越早准备越好。

问：那双学位的课和专业课的时间是如何分配的呢?

答：修双学位对专业课的学习肯定会有影响。比如我周末在华科上计算机，早晨六点多就要去挤公汽，白天有八节课，晚上还要做实验。星期一上课的时候就觉得很累，影响了专业课的学习。

问：我们专业开了很多专业选修课，你认为应该都选吗?还是有所取舍呢?

答：我觉得应该尽量多选，最好是都选。因为如果专业选修课的学分不够的话，有些事情可能会很麻烦，比如拿毕业证之类。关于专业选修课每年的政策可能会有不同，所以选得越多越保险。

问：有老师说作数学在三十岁以前都要放弃自己的业余爱好，你对这个怎么看呢?

答：做数学当然是越年轻越好，菲尔兹奖都只发给四十岁以下

的人。至于是否应该放弃自己的业余爱好，我觉得这要看自己对数学有没有兴趣。我们班有同学对数学很有兴趣，一天可以花八九个小时学数学。

问：你认为做数学是不是很有必要出国呢？你读完研打算出国吗？

答：当然有必要。国外的学术水平高，学术氛围也更好。有机会的话我是肯定要出国的。

问：你就要离开武大数院了，你能谈谈给你感受最深的是什么吗？

答：我觉得我们院的老师很好，上课很认真，对学生很负责。图书馆和资料室的资源很丰富，基本上要什么资料都能找到。

问：那你觉得哪个老师对你影响最深？

答：应该是涂振汉老师吧。他对学生很负责，经常督促大家认真学习。我们班很多同学受他影响很深。

问：你对学弟学妹们有什么建议吗？

答：我觉得最主要的就是上课要认真听讲。有些东西上课没听，下课再补的话就要花很多时间,效果也很差。

问：那你原来没学得太好的课，后来有没有再补呢？

答：当然有，我后来还经常和低年级一起听课，后来听的时候就觉得老师讲得很好，后悔当初自己没认真听课，所以说上课一定要用心。

关于保研问题的一些简要讨论

04基地　李博

肖心力，2003级数学基地班学生，现已保送南开大学数学物理方程方向。

李：现在大三的很多学生都在谈论保研方面的问题：在拿到保研指标后，他们都会面对诸如联系导师、面试、研究生学费等实际问题。你是一个成功的过来人，能否说说你的一些个人经验，给他们一些启发和帮助呢？

肖：当然可以。

李：一般来说，能够保到外地学校的学生有多少呀？

肖：现在武大对这方面采取的政策比较开明，关键还在于自己联系的情况。

李：在联系导师和学校时，能否同时联系不同的学校，参加各个学校的面试以扩大自己“命中”的几率呢？

肖：这是没有问题的。不过，最终只能去一个学校的啊，导师要你就行了。实际上并不是那么简单就可以联系好的，有些导师可能不

看中你，有些老师也许会被你思维上的某一个亮点所吸引。

李：那么，当自己确立一个研究方向后，怎样和相关导师取得联系呢?

肖：最一般的方式是发电子邮件过去。但是，你也要提防那些从不爱看邮件的导师，你最好可以亲自去找到导师，并与他进行个人的面谈，给他留下一个很好的第一印象。

李：那么，我们应该给导师提供哪些材料呢？导师会问一些什么方向的内容呢?

肖：可以带自己的成绩单过去，导师一般比较关心他这个方向有关的专业成绩的，但是，这个关心也只是相对的，不同学校的学生成绩水分不同，他最看中你的临场表现，倘若一问三不知，成绩再好那也很危险的。

导师问的问题都是一些很基本的问题，只要自己认真准备，答好这些问题并不难。比如我的导师问我的是一个正交矩阵的特征根的计算问题，还叫我上去讲一讲自己最熟悉的定理的证明。

李：可以带一些获奖的证书之类的东西去么?

肖：可以是可以，用处不大。但是有总比没有好嘛。

李：大三的学生还没有上完课，下学期的成绩还是未知数，能否现在就去联系导师呢?

肖：可以，实际上，暑假联系也未算晚，不过这方面的事情你还是越积极越好。

李：谢谢你给我们低年级学生的这些指导。

肖：不客气。

后 记

终于完成了这一期《珞珈数学》，如释重负。

4月15日，一个生命降临人间。他的出现，绝对是人类的福祗。数学因为他的存在变得异常的精彩。虽然武汉大学的春天落樱缤纷，满园飘香，但是我们决定静下心来，手持历史之匙，探寻这位数学大师不平凡的人生，重读这名学术巨匠的不寻常心迹。出发吧！

天将降大任于是人也，必先苦其心志，劳其筋骨，饿其体肤，空乏其身，行拂乱其所为，所以动心忍性，曾益其所不能。欧拉的一生是艰苦和不幸的，诸多的磨难与打击接踵而至。甚至可以说，老天对他近乎绝情，但这似乎也暗含了伟人们的成长轨迹。正是这种独特的生活经历才为他彪炳千古的学术贡献埋下了深深的伏笔。

欧拉的学术火山似乎一生都在喷发，从未停止。如果欧拉永远不会逝去，那么人类的发展应该可以比现在更加进步，至少数学的发展应该更加先进。可是欧拉不是神，他也需要让自己那颗为人类服务了一生的头脑休息一下，他也需要去天堂陪伴老欧拉。虽然我们的愿望只能够算是美好的乌托邦，但是欧拉丰富的学术著作和伟大的治学精神却承载着历史的厚重流传了下来，影响着近300年的学生和学者，激励着更多的人类为了我们共同的星球而努力探索，让他们的学术之树结出累累硕果。

于是我们努力寻找欧拉的足迹。但是，我们的整理和搜集是非常非常有限的，但是即便是这样，我们也足以感受到这名瑞士前辈对于数学无穷的热爱和疯狂的追求。这是一种境界，一种超脱自我，超脱世俗的境界，一种与科学巅峰和科学胜利直接对话的境界。无疑，人类是非常需要这样的人才的，这或许就是欧拉之所以伟大的原因吧。

也正是由于我们的整理和搜集是非常非常有限的，我们也觉得这确实不足以祭奠这位人类的巨人。基地班联谊会的同学和各年级基地班的同学虽然经过一个多月辛苦努力，但也只是了解到欧拉很少的一些方面。我们真正要做的是在以后的学习生活中，不懈的探索数学的未知领域，不断的解决数学的前沿问题，把欧拉的精神薪火相传。同时，也希望这本仓促出版《珞珈数学》能够代表武大数院莘莘学子对数学的热爱和对伟人的敬仰，向欧拉的在天之灵遥寄我们的拳拳之心。

著名数学家吴文俊院士说过，科学界需要一个没有英雄的时代。欧拉走了，我们需要更多的欧拉站出来，需要越来越多的人参与这场事关国运的智力竞赛。衷心的祝愿中国的数学能够越走越好！

——Chris

珞珈数学

刊名题词：路见可
名誉顾问：陈化 尹常倬
指导老师：吴蜀江 黄安云 李好 周宁
主　　编：魏博
副 主 编：郑燕
封面设计：魏博
排版设计：武汉新新彩印制版有限责任公司
电　　话：027—82437110